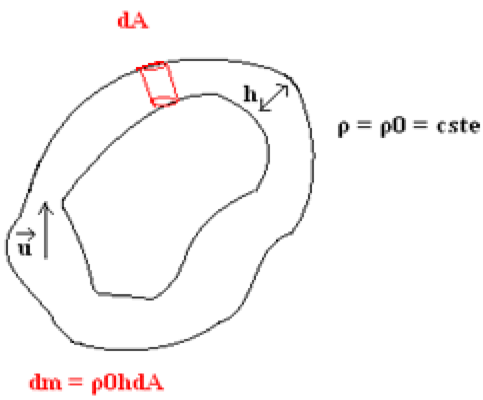
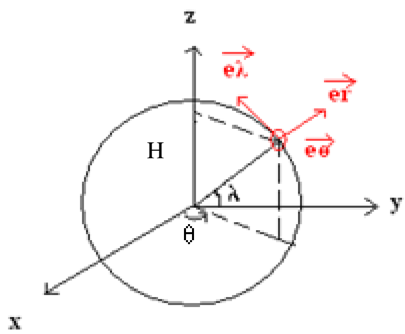
IV. Equations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant, dites de « shallow water » car utilisées dans le cas des eaux peu profondes, permettent de décrire la dynamique d'une mince couche de fluide en rotation : elles s'appliquent donc bien au cas de l'atmosphère jovienne.
Elles sont obtenues à partir de l'équation d'Euler et de l'équation de conservation de la masse, en respectant certaines hypothèses:

- couche mince : h$\ll L$.
  L'épaisseur de la couche de fluide h doit être très faible devant l'échelle caractéristique L des mouvements horizontaux .
- Equilibre hydrostatique : $\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad$ P(z)=$\rho g z + P(0)$.





λ : lattitude
θ : longitude
$\vec{e_\lambda}$: vers le nord
$\vec{e_\theta}$: vers l'ouest

$\vec{U}$ = u $\vec{e_\theta}$ +v $\vec{e_\lambda}$ $\quad \begin{cases} \text{u : vitesse vers l'Est} \\ \text{v : vitesse vers l'Ouest} \end{cases}$

$\vec{\Omega}$: vitesse de rotation de la planète

Ainsi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{U}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla}.(h\vec{U}) = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{f} \implies \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U}.\vec{\nabla}\vec{U} = -\vec{\nabla}(gh) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$$

On a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla}.(h\vec{U}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U}.\vec{\nabla}\vec{U} = -\vec{\nabla}(gh) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} \end{cases}$$

Nous allons présenter maintenant les équations décrivant les équilibres statistiques de l'équation de Shallow water (il s'agit d'états stationnaires). Pour cela, nous allons introduire de nouvelles variables :

- la vorticité potentielle q, qui est seulement transportée par le fluide.
  Son expression est :
  $$q = \frac{\vec{\omega}+2\vec{\Omega}}{h}.\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\omega+2\Omega\sin\lambda}{h}$$ après projection sur l'axe z
  ($\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}(\vec{u})$ est la vorticité).

- La fonction de courant « ψ » telle que $h\vec{u}$=$-\vec{e}_r\wedge\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla}\varphi$, selon la décomposition de Helmholtz.
  On s'intéressera désormais aux équilibres statistiques zonaux, c'est-à-dire que ψ ne dépend que de la latitude. De plus pour des solutions stationnaires, $\varphi = 0$, donc on a :
  $$h\vec{U} = -\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}\Psi$$

- L'énergie E , que l'on peut déduire de la ligne du dessus : en effet
  $$h\frac{\vec{u}^2}{2} = \frac{1}{2h}(h\vec{u})^2 = \frac{1}{2h}(\vec{\nabla}\Psi)^2 .$$
  On a donc E $= \int(\frac{1}{2}\frac{(\vec{\nabla}\Psi)^2}{h} + g\frac{h^2}{2})dA$, le terme $g\frac{h^2}{2}$ étant l'énergie potentielle et dA un élément d'aire. On peut aussi exprimer la vitesse $u(\lambda) = \frac{1}{R_p h}\frac{d\psi}{d\lambda}$, où R_p est le rayon de la planète.
- La fonction de Bernoulli B telle que $B = \frac{1}{2}\vec{U} + gh = \frac{1}{2h^2}\left(\vec{\nabla}\Psi\right)^2 + gh$

- L'entropie S du système dépendant de la vorticité potentielle : S(q)=$\int h\, s(q) d\, A$

- Soit M=$\int h\, dA$, le volume de la couche de fluide et $\Gamma = \int hq dA$, la circulation

On cherche les maximas de l'entropie en posant les contraintes E=E_0 , M=M_0 et Γ= Γ_0 relatives à la conservation de l'énergie, de l'aire, et de la circulation.
Sans détailler les calculs, cette maximisation nous donne :

$$\begin{cases} q = s'^{-1}(\beta\psi + \mu) & 1) \\ B = \dfrac{1}{\beta}(s(q) - qs'(q) - \alpha) & 2) \end{cases}$$

où α, β et μ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes posées.
On supposera que s est concave et donc que s' est croissante.
On se place dans le cas particulier de $s(q) = \frac{-1}{2}q^2$:
on a alors $s'(q) = -q$ et $s'^{-1}(q) = -q$ que l'on remplace dans les équations 1) et 2) :

$$\begin{cases} q = -\beta\psi - \mu \\ B = \dfrac{1}{\beta}[\dfrac{q^2}{2} - \alpha] \end{cases}$$

Pour simplifier l'étude, nous posons $\psi' = \psi + \frac{\mu}{\beta}$; par la suite, nous ne noterons plus le prime

Voici enfin le système d'équations décrivant les équilibres statistiques zonaux :

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\lambda} = R_p h U \\ -\frac{1}{R_p}\frac{d}{d\lambda}(ucos\lambda) + 2\Omega sin\lambda = -\beta h\psi \end{cases} \qquad gh = \beta\frac{\psi^2}{2} - \alpha - \frac{1}{2}U^2$$

V. Résolution numérique

Pour la résolution numérique des équations de Saint Venant, il faut tout d'abord adimensionaliser.
Pour cela, on exprime chaque variable avec des grandeurs caractéristiques sans dimension.

On pose donc :

- h=Hh' où H : hauteur caractéristique en mètre et h': hauteur sans dimension.
- u= $\frac{gH}{2\Omega Rp}u'$
- $\psi = \frac{gH^2}{2\Omega}\psi'$
- $\beta = \frac{(2\Omega)^2}{gH^3}\beta'$
- $\alpha = gH\alpha'$

On aura besoin de $Lr = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ qui est le rayon de déformation de Rossby .
On injecte toutes ces variables dans les équations du chapitre précédent et on obtient après adimensionalisation le système d'équations suivant (on note les nouvelles variables sans les primes):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\lambda} = hu \\ \frac{-R^2}{cos\lambda}\frac{d(ucos\lambda)}{d\lambda} + \ sin\lambda = -\beta h\psi \end{cases} \quad \text{avec} \quad h=\beta\frac{\psi^2}{2} - \alpha - \frac{R^2}{2}u^2 \quad \text{et} \quad R=\frac{Lr}{Rp}$$

Nous obtenons donc un système d'équations différentielles du premier ordre à deux inconnues : ψ et u .
On a h paire, u paire et ψ impaire. De plus, on sait que la vitesse aux pôles est nulle donc on doit avoir $u\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Nous devons fixer les conditions suivantes aux limites : $\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$.

Comme u est paire, on aura automatiquement $u\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Nous résolvons donc l'équation pour $\lambda \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

Pour résoudre notre problème, nous utiliserons le logiciel Scilab, qui contient un solveur d'équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire que les conditions limites s'appliquent en un même point.
Cependant, nous sommes dans le cas d'un problème aux conditions limites car celles-ci s'appliquent en deux points différents : λ =0 et $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Pour ce type d'équations différentielles non ordinaires, il faut résoudre un problème de tir de façon à satisfaire les conditions souhaitées. Nous devrons faire varier un paramètre u_0, représentant une valeur de la vitesse, jusqu'à trouver la bonne valeur telle que $u\left(\frac{\pi}{2}\right)$=0. Lorsque nous obtiendrons une estimation convenable de u0, nous procèderons par tâtonnement.

Au départ on pose donc : $\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ qui sont les conditions limites pour une équation différentielle ordinaire, puis on fera varier u0.