Voici notre programme numérique avec R=0,5, β =1 et α=0 :

// définition de la fonction h, qui est la hauteur en fonction

```
function [h]=hauteur(z,bet,R)
alpha=0;
h=bet*z(1)^2/2-alpha-0.5*R^2*z(2)^2;
endfunction
```

//définition de l'équation différentielle

z=$\begin{pmatrix}\psi\\u\end{pmatrix}$ et zdot=$\begin{pmatrix}\frac{d\psi}{d\lambda}\\\frac{du}{d\lambda}\end{pmatrix}$= f ($\begin{pmatrix}\psi\\u\end{pmatrix}$) = f($\begin{pmatrix}z(1)\\z(2)\end{pmatrix}$)

```
function [zdot,h]=fct(lambda,z)
R=0.5
z1=h*z(2);
z2=z(2)*tan(lambda)+ bet*h*z(1)/R^2+sin(lambda)/R^2;
zdot=[z1;z2]; ;
bet=1;
h=hauteur(z, bet,R);
endfunction
```

//test pour éviter la divergence : lorsque la fonction g s'annule, la vitesse est alors égale à100. Au-delà, il y a divergence.

```
function [y] = g(lambda,z)
y(1) = 100 - abs(z(2));
endfunction
```

//résolution de l'équation différentielle avec les conditions initiales $\psi(0)$et $u0$. On défini $\lambda \in [0;\frac{\pi}{2}]$. On doit tenir compte du test g : la résolution s'arrête lorsque la fonction g est nulle

```
function [lambda,z] =resolution(psi0,u0)
lambda=0:0.01:%pi/2;
z=ode("root",[psi0;u0],0,lambda,fct,1,g);
endfunction
```

//boucle sur u0 : permet pour différentes valeurs de u0 (tableau) de vérifier la compatibilité des arguments de la fonction ; il faut en effet que la taille des matrices z et lambda soit la même pour effectuer un plot.

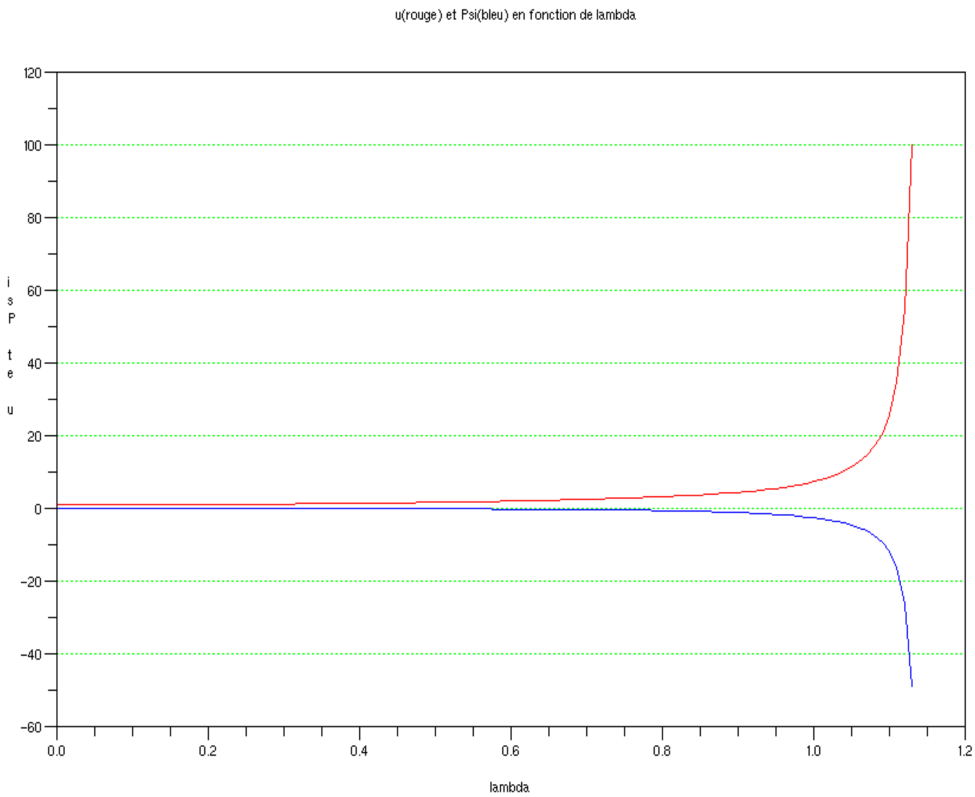
```
function [x] = test(u0)
[nr,nc] = size(u0);
x = zeros(nr,nc);
for k=1:nc
  [lambda,z] =resolution(0,u0(k));
  [nr,nc1] = size(z);
  [nr,nc2] = size(lambda);
  x(k) = abs(z(2,nc1)) + abs(nc2-nc1);
end
endfunction
```

//Calcul l'énergie pour une vitesse u0 donnée.

```
function [e] = energie(u0)
R=0.5;
bet=1;
grav=10;
[lambda,z] =resolution(0,u0);
h=hauteur(z, bet,R);
e=integrate(((1/(2*h))*(z1)^2+(grav*h^2)/2)*4*%pi*r^2,r,0,R);
endfunction
```

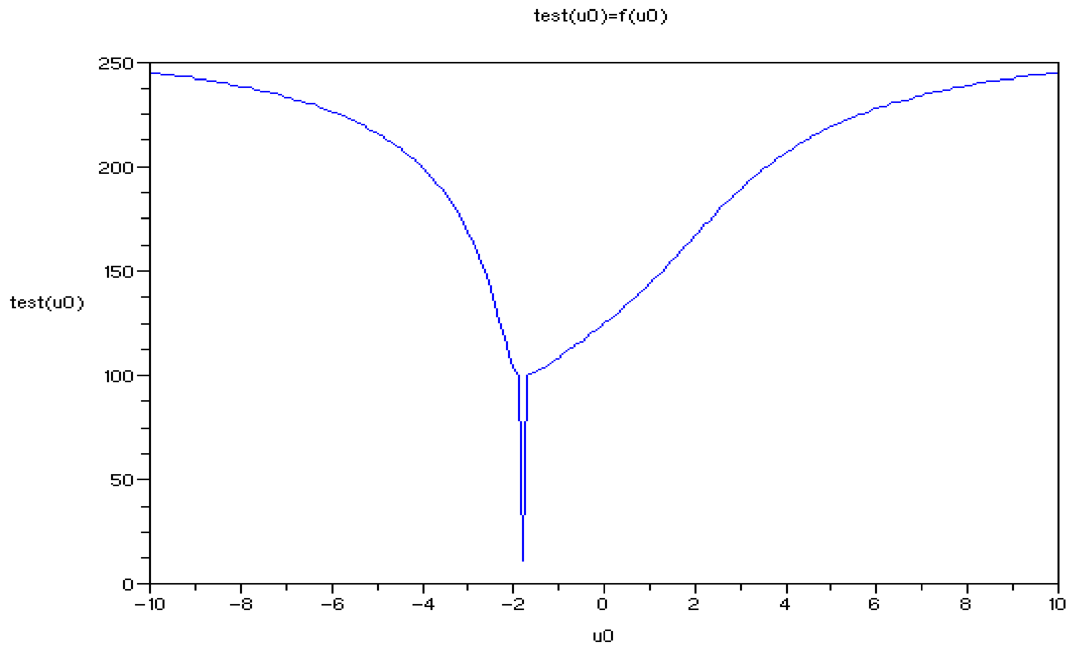
Nous présentons notre résolution numérique :

1. On commence par faire appel à la fonction resolution, afin de voir ce que l'on obtient : on fixe u0 à 1 et psi0 à 0. Comme il y a divergence, c'est-à-dire que le nombre de colonnes de la matrice lambda est supérieur à celui de z, il faut faire attention d'arrêter la fonction plot pour lambda au même nombre de colonne que z. On obtient le graphe suivant pour u (fonction qui tend vers 100) et pour ψ (fonction qui décroit).

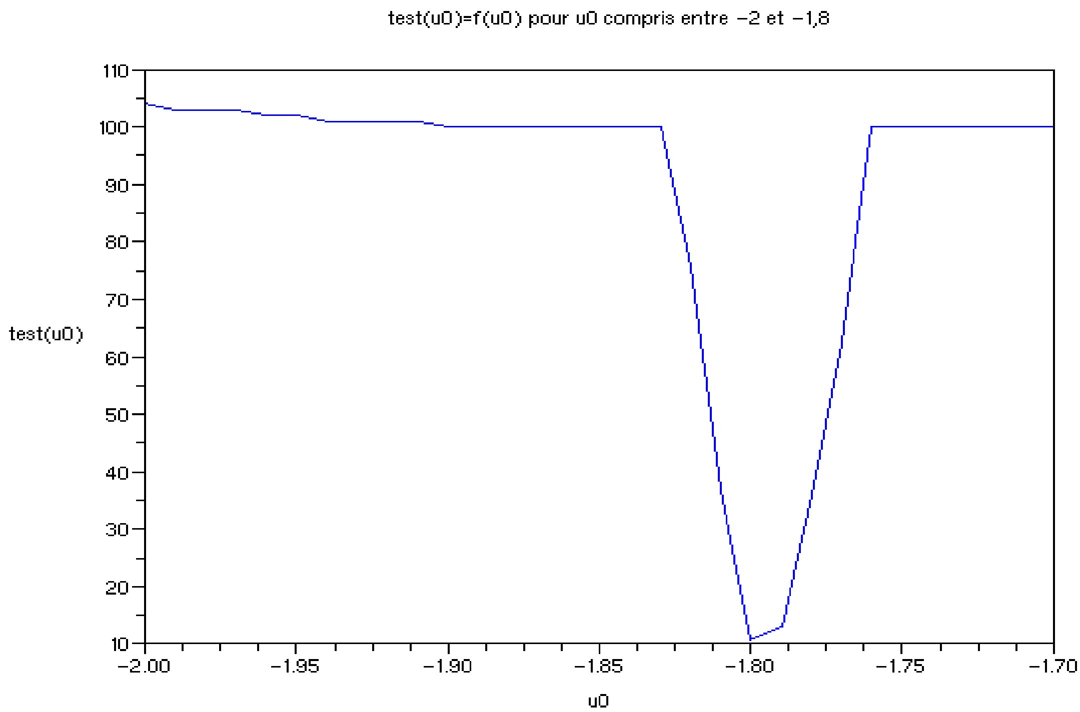


On peut remarquer que la fonction g fonctionne bien, puisque la résolution de l'équation s'est arrêtée lorsque la vitesse a atteint une valeur de 100.

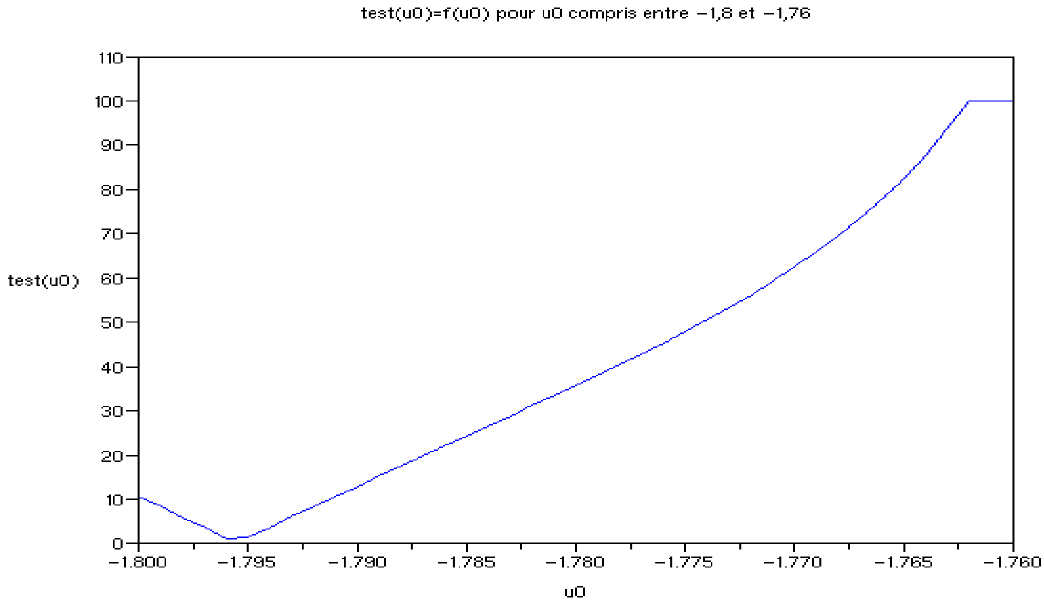
2. On souhaite ensuite définir la matrice ligne u0 allant de -10 à 10 avec un pas de 0,1, et faire appel à la fonction test afin d'afficher les valeurs des différences entre le nombre de colonne de z et celui de λ. Lorsque la différence est nulle, cela signifie que la courbe ne diverge plus.
   On plot donc ces valeurs en fonction de u0, ce qui nous permet de faire une première approximation sur la valeur de u0 pour laquelle il n'y a plus de divergence.
   On peut voir qu'elle est d'environ -2 sur le graphe obtenu :



3. Maintenant que l'on connaît une approximation de u0, on peut zoomer sur cette valeur et améliorer la précision : on définit donc la matrice u0 allant de -2 à -1,8 avec un pas de 0,01. Voici le graph obtenu :



On peut encore améliorer la précision, donc on définit u0 allant de -1,8 à -1,76 avec un pas de 0,001 :



La bonne valeur de u0 pour qu'il n'y ait plus divergence aux conditions limites est donc d'environ -1,795.
On peut aussi le vérifier grâce à une fonction solve qui donne les zéros d'une fonction ; on trouve par ce moyen une valeur de u0=-1,795552.

4. Pour finir, on recommence la résolution de l'équation avec la valeur de u0=-1,795 en condition initiale.