Rapports : Tomographie sismique : résolution du problème inverse et méthode de calcul du temps de trajet des ondes.

25 avril 2008

Introduction

La tomographie vient du grec (tomé = coupe) et signifie représentation en coupe. C'est une méthode qui permet donc d'établir une représentation en "coupe " du sous-sol. C'est à dire établir une cartographie des hétérogénéités du sous-sol décrites généralement par la vitesse de propagation des ondes sismiques (ondes de compression voir de cisaillement).
Dans le cas de la sismique active, la propagation des ondes sismiques dans le sous sol est provoquée par des sources artificielles (généralement des sources explosives) activées à des temps et des positions contrôlées. Les ondes sismiques sont enregistrées par un dispositif de capteurs (stations sismologiques) situé à la surface de la terre dans le cas de campagnes terrestres ou au fond de la mer pour des campagnes marines. Une station sismologique enregistre l'arrivée des différentes ondes sismiques au cours du temps sous forme d'une série temporelle appellée sismogramme. La grandeur mesurée est généralement la vitesse de déplacement des particules du sous-sol à la position du capteur (enregistrement de géophones) ou des variations de pression (enregistrement d'hydrophones).
La numérisation des temps d'arrivée des ondes sismiques sur les sismogrammes fournit un ensemble d'observations représentant une mesure indirecte des propriétés du sous-sol (vitesse de propagation des ondes). Ces observations peuvent être traitées par un processus d'optimisation appellé aussi problème inverse pour retrouver les propriétés du sous-sol. Le problème direct (modélisation) associé à ce problème inverse consiste à calculer les temps de trajet des ondes sismiques dans un modèle du sous sol connu a priori. Ces temps de trajet sont la solution de l'équation eikonal exprimant l'égalité entre le module au carré du gradient des temps de trajet et le carré de la lenteur.

Première partie
Théorie :Le problème inverse : linéarisation et résolution.

1 Caractérisation de la structure du sous-sol dans l'hypothèse de milieux stratifiés

Pour commencer intéressons-nous à un cas simple correspondant au cas de milieux stratifiés rencontrés notamment dans les bassins sédimentaires. Les couches sont horizontales et les vitesses de propagation sont homogènes dans chaque couche. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que la vitesse augmente avec la profondeur.

Dans le cas où la source et le récepteur sont à la même altitude : on peut trouver l'équation du temps de trajet à partir du trajet qu'à suivit l'onde de la source au récepteur. Le temps de trajet est alors définit par :

$$t = \frac{x}{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i}{V_i} \cos(\theta_i) \tag{1}$$

Où

$$\theta_i = \sin^{-1}(V_i/V_n) \tag{2}$$

on en déduit l'épaisseur des couches en fonction des temps intercept (temps tels que $t_i = t(x{=}0)$)

$$h \;=\; vitesse \times temps$$

$$h_n = \frac{V_n}{2\cos\theta_{cn}} \left(t_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i}{V_i} \cos(\theta_i) \right) \tag{3}$$

Où θ_{cn}désigne les angles critiques :

$$\frac{1}{V_{cn+1}} = \frac{\sin\theta_{cn}}{V_n} \tag{4}$$

Si la source est enfouie mais le tir est effectué à la surface de l'eau le temps de trajet devient :

$$t = \frac{x}{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i}{V_i} \cos(\theta_i) + \frac{h_o}{V_o} \cos\theta_0 \tag{5}$$

où $\frac{h_o}{V_o}\cos\theta_0$est le terme correctif qui correspond au temps que l'onde met pour traverser la couche d'eau.

L'épaisseur des couches devient donc :

$$h_n = \frac{V_n}{2\cos\theta_{cn}} \left(t_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i}{V_i} \cos(\theta_i) - \frac{h_o}{V_o} \cos\theta_0 \right) \tag{6}$$

Ces formules sont utilisées pour déterminer un modèle de vitesse 1D à partir de données de sismique réfraction.
On commence par calculer les vitesses en mesurant la pente des hodochrones dans le plan offset-temps.
Une hodocrone est une courbe décrivant les temps d'arrivée d'une onde sismique en fonction de l'offset et la distance offset correspond à la distance horizontale entre la source et le capteur. L'inverse de la pente fourni la vitesse.
Des vitesses on déduit les angles de transmission θ(équation 2). On commence par les couches superficielles pour descendre vers les couches profondes. On mesure les temps intercept dont on déduit l'épaisseur des couches avec les formules de t et de $h_n$précédente.

⇒donc cette méthode va nous fournir des données sur le sous sol. On récupère les temps de trajet mais aussi un premier modèle approximatif du sous-sol : le nombre de couches, leurs profondeurs ainsi que leurs vitesses caractéristiques.

Dans la plus part des cas on ne peut pas utilisé cette méthode dont les hypothèses initiales simplifient de manière abusive la constitution du sous-sol. Il faut donc faire appel à des méthodes tomographiques fondées sur le calcul de temps de trajet dans des milieux d'hétérogénéité quelconque (problème direct) et sur la résolution d'un problème d'optimisation (problème inverse).

Deuxième partie
Problème direct calcul des temps de trajet .

Les temps de trajet sont les solutions de l'équation eikonal.

2 Détermination de l'équation eikonal

Pour cela il nous faut considérer l'équation d'onde scalaire :

$$-\frac{\omega^2}{c^2(x)}P(x,\omega) = \Delta P(x,\omega) \tag{7}$$

où c(x)=champs de vitesse
$P(x,\omega)$ = champs de pression
On cherche une solution de la forme d'onde plane locale :

$$P(x,\omega) = A(x,\omega)S(\omega)\exp[i\omega T(x)] \tag{8}$$

dans le cadre de l'approximation haute fréquence de la théorie des rais
On fait l'hypothèse que le terme d'amplitude peut se développer en série de puissance :

$$A(x,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A_n(x)}{(i\omega)^n} \tag{9}$$

Si on fait l'approximation des hautes fréquences, on ne peut conserver que le terme d'ordre 0

$$P(x,\omega) = A_0 S\exp[i\omega T(x)] \tag{10}$$

$$P(x,\omega) = A_0 S(t = T) \tag{11}$$

Où T : temps de propagation et t : temps caractéristique de la source.
Remarque : l'approximation des hautes fréquences est valide si T$\gg\frac{1}{\omega}$. Où $1/\omega$représente la période du signal de la source.
Maintenant on injecte P(x,ω) dans l'équation d'onde. On obtient ainsi l'équation eikonal :

$$(\nabla T(x))^2 = \frac{1}{c^2(x)} \tag{12}$$

La résolution de l'équation eikonal par des méthodes numériques tels que les différences finies permet de calculer un temps de propagation entre une source et n'importe quel point du milieu. A partir des cartes de temps de trajet, il est possible de tracer les rais, trajectoires perpendiculaires au front d'onde (surface iso-temps), par rétro propagation depuis les récepteurs jusqu'à la source en suivant la direction opposée au gradient des temps de trajet.

Troisième partie

Problème inverse par optimisation locale.

3 Linéarisation du problème par l'approximation du premier ordre.

Comme expliqué plus haut, on parle de problème inverse car le problème inverse consiste à reconstruire un modèle du sous sol à partir des temps de trajet par un processus automatisé d'optimisation locale

Considérons une relation non linéaire entre **d (**les données, ici ce sont les temps que nous avons récoltés) et le modèle (du sous sol que nous cherchons à construire) **m :**

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{13}$$

où **g** est un opérateur.

On souhaite linéariser cette équation. Tout d'abord, on établit une estimation du modèle **m** :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m} \tag{14}$$

Ici $\delta\mathbf{m}$ représente la perturbation du modèle. $\mathbf{m_0}$ est ce qu'on appel le modèle de référence.

Nous faisons de même pour **d**. Ce qui nous permet de définir la perturbation des données $\delta\mathbf{d}$

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d_0} \tag{15}$$

Si on remplace dans *l'équation (13)* **d** par $\delta\mathbf{d}$ et **m**, on obtient un modèle de perturbation :

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d_0} = \mathbf{g}(\mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m}) - \mathbf{g}(\mathbf{m_0}) \tag{16}$$

Pour obtenir une relation linéaire entre $\delta\mathbf{d}$ et $\delta\mathbf{m}$ il faut que nous fassions un développement de Taylor au premiére ordre sur **g** :

$$\mathbf{g}(\mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{m_0}) + [\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}}\delta\mathbf{m} + \mathcal{O}(\mathbf{m^2}) \tag{17}$$

donc on a :

$$\mathbf{g}(\mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m}) - \mathbf{g}(\mathbf{m_0}) \approx [\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}}\delta\mathbf{m} \tag{18}$$

On injecte ensuite *l'équation (18)* dans *la (16)* ce qui donne :

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m}) - \mathbf{g}(\mathbf{m_0}) = [\tfrac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}}\delta\mathbf{m} = \mathbf{B_0}\delta\mathbf{m}$$

donc :

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{B_0}\delta\mathbf{m} \tag{19}$$

On obtient une relation compacte et linéaire où $\mathbf{B_0}$ est est la matrice dériver de Fréchet :

$$\mathbf{B}_0 = [\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}]_{m_0} \tag{20}$$

4 Résolution de l'équation linéaire.

On va ici distinguer deux types de données. $\mathbf{d}_{cal}$ ou $\mathbf{t_{cal}}$ obtenu par résolution de l'équation eikonal et $\mathbf{d_{obs}}$

Dans le but de construire le modèle par informatique, la première étape est la numérisation (ou pointé) des temps d'arrivée observés. Cette manipulation (qui sera développée plus bas) va nous fournir le vecteur $\mathbf{d_{obs}}$. (en l'occurrence les temps de trajet $\mathbf{t_{obs}}$).

Il faut ensuite construire un modèle initial (le $\mathbf{m}_0$). On peut le construire par exemple à partir de l'approximation des milieux tabulaires.

Une fois que l'on a $\mathbf{m}_0$ et $\mathbf{t}_{obs}$on peut lancer le processus d'optimisation qui va effectuer une mise à jour iterative du modèle de vitesse.

L'Algorithme de base suit les étapes suivantes :

Calcul des temps t_{cal}(résolution de l'eikonal) et des rais (rétropropagation dans la direction opposée au gradient des temps) dans m0

Calcul du vecteur résidu $e = t_{obs} - t_{cal}$et de la fonction coût

Calcul des dérivés de Fréchet dt/dm à partir des coordonnées des rais

Construction du systeme tomographique régularisé et résolution de ce système par méthodes de type gradient conjugué.

La solution de ce systeme donne le modele de perturbation δm.

Mis à jour du modèle de vitesse$m = m0 + \delta m$

puis Retour a la phase 1 ou m est utilisé comme nouveau modèle initial. On itere ce processus jusqu'à ce que l'on observe plus de décroissance de la

fonction cout.

4.1 Introduction des fonctions "erreur"(misfit) et "Coût"(cost)

On introduit la fonction erreur, et la fonction coût qui vont confronter ces deux jeux de données et permettre d'optimiser le modèle obtenu par résolution du problème inverse.

Fonction erreur : on la note **"e"** et elle représente l'écart entre les temps observés "$\mathbf{d}_{obs}$" et les temps calculés "$\mathbf{d}_{cal}$"

$$\mathbf{e} = |\mathbf{d_{obs}} - \mathbf{d_{cal}}(\mathbf{m})| \tag{21}$$

avec $\mathbf{d_{cal}}(\mathbf{m}) = \mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{g}(\mathbf{m_0} + \delta\mathbf{m})$

On a besoin de définir un critère qui mesure l'écart entre les données calculées et les données observées ; car le but du problème inverse et de minimiser cette écart. On introduit la fonction "coût" qui mesure cet écart. **Fonction coût :**

$$\mathbf{C}(\mathbf{m}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{e^2} \tag{22}$$

Qui peut aussi être écrit sous la forme :

$$\mathbf{C(m)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{\dagger}\mathbf{e} \tag{23}$$

où † représente le transposé conjugué. Considérons un problème discret : Le vecteur **e** s'écrit $\mathbf{e} = [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_N}]^{\mathbf{T}}$ Donc *l'équation (23)* devient :

$$\mathbf{C(m)} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} e_i^* e_i$$

$$\mathbf{C(m)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}[(\Re\mathbf{e_i})^{\mathbf{2}} + (\Im\mathbf{e_i})^{\mathbf{2}}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\|e_i\|^2 \tag{24}$$

où * représente le conjugué. $\Re$ et $\Im$ représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

4.2 Minimisation de la fonction coût avec une approche linéaire.

Comme nous l'avons dit plus haut le problème inverse vise à minimiser l'écart entre les données calculées et observées. L'écart est représenté par la fonction coût donc pour minimiser l'écart, on cherche quand la dérivée de cette fonction s'annule :

$$\frac{\partial \mathbf{C(m)}}{\partial \mathbf{m}} = 0 \tag{25}$$

En réalité cette équation est une équation vectorielle :

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{m_1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{m}_2} = 0 \\ .... \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{m}_M} = 0 \end{array} \tag{26}$$

où $\mathbf{m_i}$sont les éléments du vecteur $\mathbf{m} = [\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}, ..., \mathbf{m_M}]^{\mathbf{T}}$. On se rappelle que la fonction coût est donnée par *l'équation (23)* , **"e"** est donné par *l'équation (21),* et que nous exprimons $\mathbf{d_{cal}(m)}$ par l'approximation linéaire $g(m_0) + [\frac{\partial g(m)}{\partial m}]_{m_0}\delta m$.

Donc "**e**" devient

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{d_{obs}} - \mathbf{g(m_0)} + [\frac{\partial \mathbf{g(m)}}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}}\delta\mathbf{m} \approx \mathbf{\Delta d} - [\frac{\partial \mathbf{g(m)}}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}}\delta\mathbf{m} \tag{27}$$

où$\mathbf{\Delta d}$est l'erreur entre les données relevées et les données calculées dans le modèle de référence $\mathbf{m_0}$. Maintenant considérons un problème discret.

Les vecteurs donnée et modèle : **d** et **m** sont donnés respectivement par $\mathbf{d} = [\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, ..., \mathbf{d_N}]^{\mathbf{T}}$ et $\mathbf{m} = [\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}, ..., \mathbf{m_M}]^{\mathbf{T}}$.

On notera aussi :

$$\mathbf{B_0} = [\frac{\partial \mathbf{g(m)}}{\partial \mathbf{m}}]_{\mathbf{m_0}} = [\mathbf{b_{i,j}}]_{\mathbf{i=1,N;j=1,M}} \tag{28}$$

Où $\mathbf{B_0}$est appelée matrice *Jacobien* ou *dérivée de Frechet.* La fonction coût devient donc :

$$\mathbf{C(m)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}(\mathbf{\Delta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{M}}\mathbf{b_{i,j}m_j})^*(\mathbf{\Delta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{M}}\mathbf{b_{i,j}m_j}) \tag{29}$$

4.3 Équations Normales

Toujours dans l'optique de minimiser l'écart, regardons ce que devient la dérivée partielle de la fonction coût :

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{m_k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}(-\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,k}})(\mathbf{\Delta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{M}}\mathbf{b_{i,j}m_j}) + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}(\mathbf{\Delta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{M}}\mathbf{b_{i,j}m_j})^*(-\mathbf{b_{i,,k}})] = 0 \tag{30}$$

On considère que le paramètre $\mathbf{m_i}$ est une valeur réelle. On réécrit la fonction précédente en regroupant les termes similaires.

$$\sum_{i=1}^{N}((\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,k}}\Delta_i) + \mathbf{b_{i,k}}\Delta_i^*) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,k}}\mathbf{b_{i,j}}+\mathbf{b_{i,k}}\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,j}})\mathbf{m_j} \tag{31}$$

$$2\Re\sum_{i=1}^{N}\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,k}}\Delta_i = 2\Re\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,k}}\mathbf{b_{i,j}m_j} \tag{32}$$

Nous pouvons introduire l'élément $\mathbf{b}^\dagger_{\mathbf{k,i}}$ (transposé puis conjugué) de$\mathbf{B}_0$.

$$2\Re\sum_{i=1}^{M}\mathbf{b}^\dagger_{\mathbf{k,i}}\Delta_i = 2\Re\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{b}^\dagger_{\mathbf{k,i}}\mathbf{b_{i,j}m_j} \tag{33}$$

Nous reconnaissons dans la partie gauche et droite de l'équation ci-dessus les vecteurs matrices qui donne respectivement $\mathbf{B_0^\dagger}\triangle\mathrm{d}$ et $\mathbf{B_0^\dagger B_0}\delta\mathbf{m}$ Donc de l'équation précédente, on déduit des équations normales :

$$\Re(\mathbf{B_0^\dagger}\triangle\mathrm{d}) = \Re(\mathbf{B_0^\dagger B_0})\delta\mathbf{m} \tag{34}$$

La perturbation du modèle est donné par :

$$\delta\mathrm{m}= \left[\Re\left[\mathbf{B_0^\dagger B_0}\right]\right]^{-1}\Re\left[\mathbf{B_0^\dagger}\triangle\mathbf{d}\right] \tag{35}$$

Par équivalence, on a :

$$\delta\mathrm{m}= \left[\Re\left[\mathbf{B_0^\dagger B_0}\right]\right]^{-1}\Re\left[\mathbf{B_0^t}\triangle\mathbf{d}^*\right] \tag{36}$$

4.4 Interprétation des équations normales : Gradient

Regardons l'élément du gradient de la fonction coût dans la représentation discrète (on repart de *l'équation (? ?)*) :

$$\frac{\partial C(\mathrm{m})}{\partial \mathbf{m_k}} = -\Re(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{b}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{k,i}}(\Delta_i^* - \sum_{j=1}^{M}\mathbf{b}^*_{\mathbf{i,j}}\mathbf{m_j})) \tag{37}$$

Retournons à la forme matricielle, nous avons :

$$\frac{\partial C(\mathrm{m})}{\partial \mathbf{m_k}} = -\Re(\mathbf{B_0^t}(\triangle\mathrm{d}^* - \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathrm{m})}{\partial \mathbf{m_k}}\right]^*_{m_0}\delta\mathrm{m})) \tag{38}$$

Considérons le gradient de la fonction coût au point $\mathrm{m}_0$du modèle espace (*Remarque* : δm=0) :

$$\frac{\partial C(\mathrm{m}_0)}{\partial \mathbf{m_0}} = -\Re\left[\mathrm{B}_0^t \triangle \mathrm{d}^*\right] \tag{39}$$

Nous voyons que le gradient de la fonction coût au point $\mathrm{m}_0$du modèle espace est égal au terme $-\Re\left[\mathrm{B}_0^t \triangle \mathrm{d}^*\right]$de l'équation normale.

Le gradient de la fonction coût donne la direction le long de laquelle est recherché le minimum local de la fonction coût.

La dérivée seconde de la fonction coût nous fournis la quantité avec laquelle il faut descendre dans la direction opposé du gradient de la fonction coût. La dérivée seconde de la fonction coût est donnée ci après :

$$\frac{\partial^2 C(\mathrm{m})}{\partial \mathbf{m_k} \partial \mathbf{m_l}} = \Re(\sum_{i=1}^{M} \mathbf{b_{k,i}^t} \mathbf{b_{i,l}^*}) \tag{40}$$

Retournons à la forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 C(\delta \mathrm{m})}{\partial \mathbf{m^2}} = \Re(\mathrm{B}_0^t \mathrm{B}_0^*) \tag{41}$$

La dérivée seconde de la fonction est égale au terme $\Re(\mathrm{B}_0^t \mathrm{B}_0^*)$ des équations normales. Cette dérivée seconde donne une information sur la courbure de la fonction coût autour du point $\mathbf{m_0}$. On en déduit donc que l'approximation linéaire de la fonction coût (*Rappel :* cette approximation est obtenue en remplaçant $\mathbf{g(m)}$) par l'approximation $g(m_0) + [\frac{\partial g(m)}{\partial m}]_{m_0}$) nous donne une fonction parabolique de $\delta\mathbf{m}$.

Remarque : la dérivée troisième de la fonction coût nous donne 0.

Le programme qui permet d'obtenir et d'améliorer le modèle va se servir de ces méthodes, de la fonction coût et de la valeur pour laquelle sa dérivée s'annule afin de trouver l'écart minimal entre les données et donc le modèle le plus précis.

Quatrième partie

Méthode de résolution du problème inverse en utilisant les temps de trajets.

5 Comment fait on pour obtenir $\mathbf{d_{obs}}$ (= pour nous ça correspond a t_{obs})

$\mathbf{d_{obs}}$ est obtenu lors du traitement du jeu de sismogrammes par informatique. Pour obtenir les $\mathbf{t_{obs}}$et exploiter les sismogrammes, nous utilisons un logiciel "plotsegy".

Avant de pointé les temps de trajet, des pré traitements des données sont souvent nécessaires pour améliorer le rapport signal sur bruit (filtrage) et améliorer la résolution du pointé (dé-convolution).

Ceci permet de mieux visualiser les perturbations correspondants aux différents temps d'arrivée (hodochrones). Nous nous concentrerons sur les temps de première arrivé. Nous les pointons une à une c'est à dire que nous relevons toutes les perturbations correspondants à la première arrivé. Mais à chaque discontinuité de l'hodochrone, on utilise un marqueur différent (afin de bien distingué chaque discontinuité qui correspond à une discontinuité dans la croûte donc à une couche différente).

Cf annexe A pour voir l'image

Remarque : Sur les collections de sismographes les hodocrones d'une couche correspondent en faite à deux pointés différent. Généralement les hodocrones sont symétrique (on les retrouve de par et d'autre du pic plus où moins central).

Une fois nos pointés terminés on obtient un fichier texte contenant toutes les informations relatives au pointés : le temps de trajet, le numéro de couche.

6 Comment faire pour minimiser l'erreur des temps de trajet tomographique afin de pouvoir faire un modèle cohérent.

Maintenant on va réaliser la minimisation de l'erreur. Pour ce faire on va se servir des données que nous avons pour obtenir δt. L'ordinateur va travailler sous forme linéaire comme nous l'avons fait précédemment. Il va devoir déterminé la matrice dérivé de fréchet en résolvant l'équation eikonal. Maintenant regardons d'un peu plus prés.

Les temps de trajets t sont liés à la lenteur u(x,z) ($\mathrm{u} = \frac{1}{v}$ ou v = vitesse) par :

$$\mathrm{t(s,r)} = \int_{\mathcal{L}\mathrm{u(x,z)}} \mathrm{u(x,z)dl} \tag{42}$$

équivaut à

$$\mathrm{d=g(m)}$$

où s et r dénote respectivement la source et le récepteur des positions.

Considérons une petite perturbation δu(x,z) de lenteur ; on appelle modèle de référence de la lenteur $\mathrm{u}_0(x,z)$

$$\mathrm{u(x,z)} = \mathrm{u}_0(x,z) + \delta \mathrm{u(x,z)} \tag{43}$$

L'équation t(s,r) devient :

$$\mathrm{t(s,r)} = \int_{\mathcal{L}\mathrm{u}_0(x,z)+\delta \mathrm{u(x,z)}} \mathrm{u}_0(\mathrm{x,z})\mathrm{dl} + \int_{\mathcal{L}\mathrm{u}_0(x,z)+\delta \mathrm{u(x,z)}} \delta \mathrm{u(x,z)dl} \tag{44}$$

Le principe de Fermât déclare que le chemin des rais stationnaires doit respecter la lenteur.

$$\mathrm{t(s,r)} = \int_{\mathcal{L}\mathrm{u}_0(x,z)} \mathrm{u}_0(\mathrm{x,z})\mathrm{dl} + \int_{\mathcal{L}\mathrm{u}_0(x,z)} \delta \mathrm{u(x,z)dl} \tag{45}$$

Après discrétisation du rai_m sous forme de segments de longueur Δl l'équation précédente peut s'écrire sous la forme discrète suivante :

$$\delta \mathrm{t}_m = \sum_{i=1}^{N} \delta \mathrm{u}_i \triangle \mathrm{l} \tag{46}$$

Par analogie à l'équation générale (cf *équation (??)*) δd=B$_0\delta$m, nous voyons que la dérivée partielle du temps de trajet $t_m$par rapport à un paramètre $u_k$est la longueur du segment du rai passant par u_k.

$$\frac{\partial t_m}{\partial u_k} = \Delta l \tag{47}$$

On notera que le calcul des dérivés de Fréchet nécessite le tracé des rais par opposition aux méthodes d' optimisation globale (méthodes de Monte Carlo et assimilées) qui nécessitent uniquement le calcul des temps de trajets).

Après la construction du vecteur résidu Δd et de la matrice dérivé de Fréchet le problème numérique se ramène à la résolution d'un système d'équation linéaire. Ce système est résolut avec l'algorithme LSQR fondé sur une méthode de gradients conjugués (ceci est donné a titre d'information).

Etant donné qu'un problème tomographique est généralement a la fois sur et sous déterminé ; des contraintes de régularisation sont ajoutées au système. Cela donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_d}\frac{\partial t}{\partial u} \\ \lambda C_v \\ \lambda_h C_h \\ \varepsilon G \end{pmatrix} \Delta m = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\sigma_d} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Où les matrices $C_v$et C_h décrivent des filtres Gaussiens verticaux et horizontaux et G une matrice diagonale et ε facteur d'amortissement.

Récapitulatif : On connait δt, l'équtaion eikonal nous permet de calculé la matrice dérivé de Fréchet et ainsi on peut calculé Δm et donc ainsi obtenir un modéle du sous sol.

Conclusion

Nous avons dans ce rapport mentionné l'approche tomographique la plus classique fondée sur l'utilisation exclusive des temps de trajet. L'approche que nous avons faite demande des ressources informatiques puissantes. En effet cette méthode est itérative et demande à l'odinateur un temps de calcul important. Les limites de ces tomographies sont donc leur résolution spatiale relativement limitée estimée à la largeur de la première zone de Fresnel. Des méthodes tomographiques par inversion du sismogramme complet (amplitude et phase de chaque arrivée) font l'objet de recherches en cours. Ces méthodes fondées sur la résolution complète des équations de l'élastodynamique permettent un gain de résolution significatif (une demi longueur d'onde) mais présentent un certains nombres de difficultés associées à leur coût numérique et leur manque de robustesse.