

Méthode d'interpolation appliquée à la cartographie d'un champ speckle

Tutoré par Patrick SEBBAH, Laboratoire Physique de la Matière Condensée (L.P.M.C.), CNRS – UMR 6622 – Université de NICE

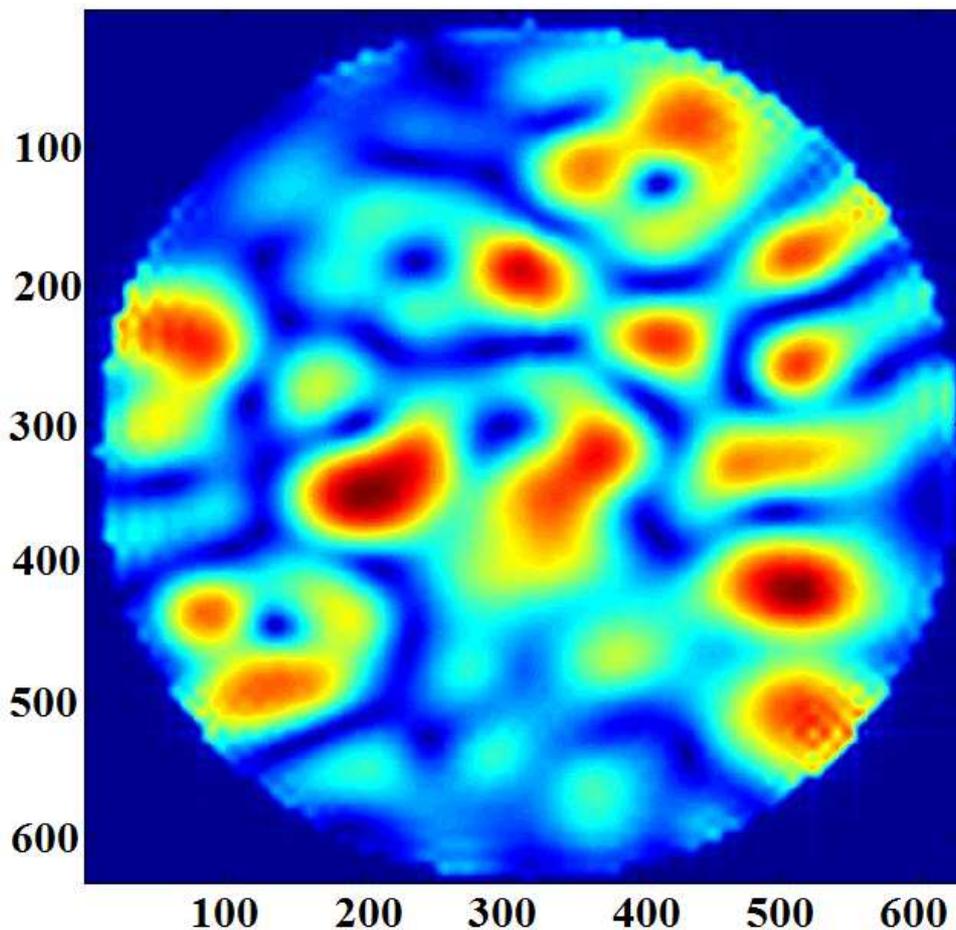


Figure de speckle (module du champ électrique) interpolée d'un facteur 8

Table des matières

1. Introduction	page 3
2. Méthode d'interpolation	
2.1 Généralités	page 4
2.2 Illustrations	page 6
3. Singularités de phase	
3.1 Localisation de singularité	page 8
3.2 Autour d'une singularité	page 9
3.3 Ligne d'équiphase	page 11
3.4 Ligne d'équi-intensité	page 11
3.5 Ligne d'équicourant	page 12
4. Conclusion	page 12
5. Références	page 13
6. Annexes	
I : Programme d'interpolation à une dimension	page 13
I bis : Programme d'interpolation à une dimension, avec le nombre de points souhaités	page 13
II : Programme d'interpolation à deux dimensions	page 14
III : Programme de détection des singularités	page 14

1. INTRODUCTION

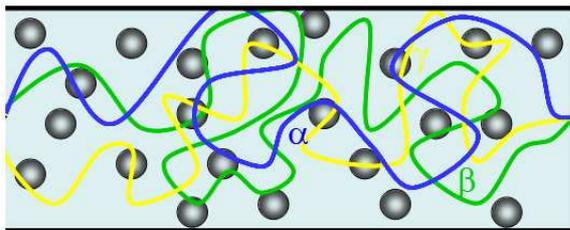
Une des équipes du Laboratoire Physique de la Matière Condensée (L.P.M.C.) à laquelle appartient M. Patrick SEBBAH travaille sur la propagation des ondes en milieu complexe. Elle étudie plus particulièrement les interférences dans les milieux très fortement diffusifs. On peut trouver de tels milieux dans la vie de tous les jours : c'est le cas du lait par exemple ou encore de la peinture blanche. Les travaux de l'équipe s'appuient entre autre sur deux expériences : une expérience acoustique et une expérience mettant en œuvre la propagation de micro-ondes dans un milieu diffusif. Ces expériences permettent de modéliser la diffusion multiple et les effets d'interférences à une échelle macroscopique.

Ce qui intéresse le plus l'équipe, c'est l'information sur la phase car c'est la phase qui est responsable des phénomènes d'interférences, de plus elle fournit des informations sur le type de propagation dans le milieu. Ces phénomènes d'interférences peuvent être observés sur des figures de speckle (tavelure en français) dont l'étude constitue le sujet de notre exposé.

La première expérience est une expérience acoustique, qui met en œuvre une mesure temporelle. On envoie en effet une impulsion acoustique et on regarde la réponse spectrale du système ; puis on obtient l'amplitude et la phase par transformée de Fourier. Nous ne nous intéresserons pas aux résultats de cette expérience.

La deuxième expérience met en œuvre tube métallique de 1m de long et de 7.5 cm de diamètre contenant de nombreuses billes d'Alumine (d'indice de réfraction 3.14) incluses dans des billes plus grandes de Styrofoam (d'indice de réfraction 1.04) ; ces billes remplissent entièrement le tube formant ainsi un milieu très diffusif à cause du fort contraste d'indice et du désordre de position. Les chercheurs utilisent ensuite un analyseur de réseau qui sert à la fois de source qui émet un champ micro-onde (dont la fréquence varie pendant toute l'expérience) en entrée du tube et de détecteur.

L'onde émise suit des chemins de diffusion multiples à l'intérieur du tube, avec des allers-retours dans le milieu comme le montre la figure ci-dessous.



$$E = A_{\alpha} e^{i\phi_{\alpha}} + A_{\beta} e^{i\phi_{\beta}} + A_{\gamma} e^{i\phi_{\gamma}}$$

En sortie du tube, de nombreuses ondes cohérentes se superposent et le champ en sortie peut s'écrire comme une somme quasi-infinie d'ondes du type $A_{\alpha} \cdot e^{i\phi_{\alpha}}$.

A la sortie se superposent donc en un point de nombreuses ondes cohérentes issues de chemins différents possédant des phases différentes: il y a donc des interférences. L'analyseur de réseau mesure ensuite le champ proche (à moins d'une longueur d'onde du tube) en sortie du tube, il peut aussi mesurer la phase ou plutôt le déphasage car il est émetteur et récepteur et connaît donc la phase initiale de l'onde émise.

Pour une fréquence fixée la mesure se fait point par point, l'antenne se déplace en effet de proche en proche à la sortie du tube, la mesure est donc discrète ; de plus elle est stationnaire car elle ne dépend pas du temps.

Les données sont stockées sous la forme d'une matrice qui contient les valeurs complexes du champ pour chaque point : ces valeurs complexes contiennent l'information sur la phase et sur l'amplitude.

La mesure est donc discrète et l'exploitation des résultats est limitée par le nombre de points de la mesure, c'est ici que se situe notre problème : comment peut-on, dans le cas général, améliorer la « résolution » d'une mesure ? C'est ce que nous étudierons en développant une méthode d'interpolation et en l'appliquant au cas des speckles.

2. METHODE D'INTERPOLATION

2.1 GENERALITES

Le problème est posé : nous devons pouvoir augmenter « la résolution » d'une mesure quelconque en augmentant le nombre de points d'une matrice de données.

Plusieurs méthodes d'interpolation sont possibles, par le polynôme de Lagrange par exemple (cf. réf. n°7) mais ce n'est pas cette méthode que nous utiliserons.

Il existe en mathématique le théorème d'interpolation de Shannon (cf. réf n°4) qui sert à reconstituer une fonction de manière continue à partir d'un certain nombre de points discrets et c'est cette méthode que nous utiliserons. Ce théorème permet de passer d'un point de vue analogique à un point de vue digital et réciproquement.

Si $x(t)$ est un signal continu (une mesure continue) échantillonnée avec la période T alors le théorème de Shannon est le suivant :

Théorème d'interpolation de Shannon-Whittaker :

L'ensemble des points du signal d'origine s'obtient par la relation :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n.T] \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - nT}{T} \right)$$

T étant la période d'échantillonnage, sinc est la fonction sinus cardinal normalisée (sinc(0)=1).

Le signal original $x(t)$ peut être reconstitué si les deux conditions limites sont vérifiées :

- i) Le signal $x(t)$ possède une transformée de Fourier intégrable (sans divergence)
- ii) Le signal $x(t)$ doit vérifier le théorème d'échantillonnage de Shannon, il faut donc que le signal d'origine ait été correctement échantillonné pour que l'on puisse le reconstituer entièrement

La condition ii) est donnée par le théorème d'échantillonnage de Shannon :

Théorème d'échantillonnage de Shannon :

Si la plus haute fréquence d'un signal $x(t)$ est f_m , la fréquence $(1/T - f_m)$ ne doit pas appartenir au spectre du signal, ce qui conduit à l'inégalité :

$$\frac{1}{T} > 2f_M$$

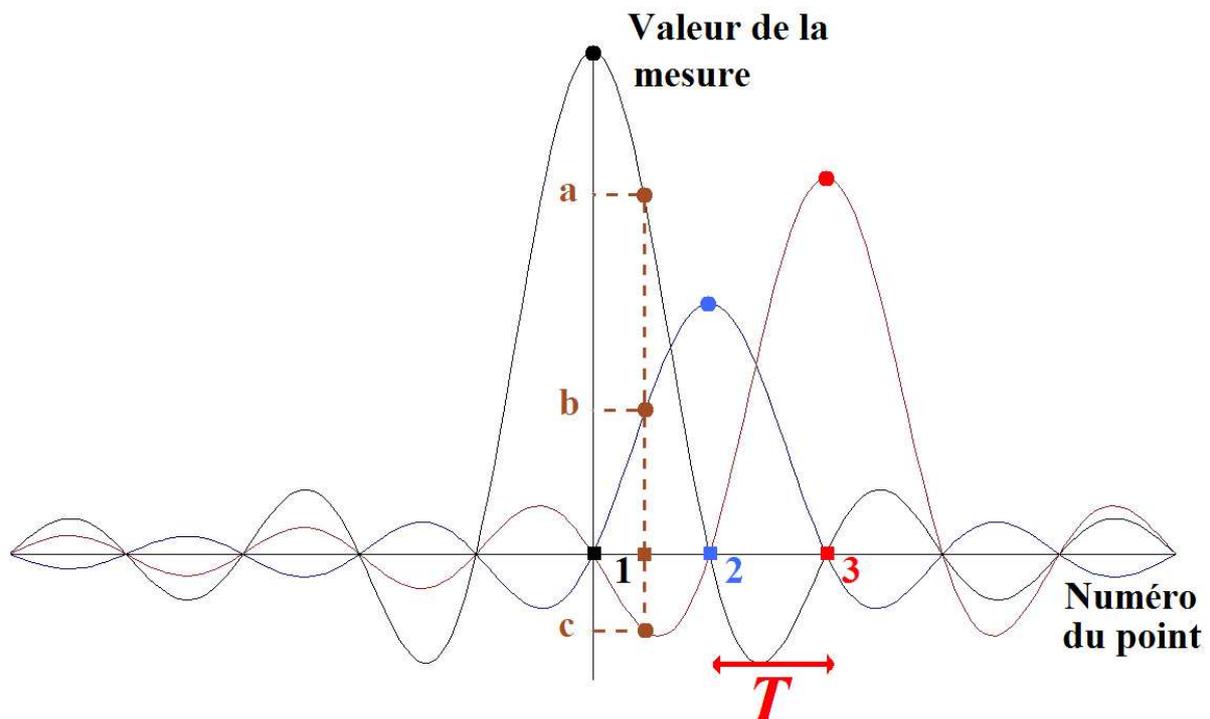
Pour qu'un signal $x(t)$ ne soit pas perturbé par l'échantillonnage (pas de perte ni de détérioration d'information) il faut que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la plus haute fréquence du signal (dans l'espace de Fourier). En effet, le

théorème d'interpolation revient, dans l'espace de Fourier, à multiplier le spectre par une porte (Π) car la transformée de Fourier d'un sinc est une fonction porte (Π) ; s'il y avait des fréquences trop élevées, elles seraient filtrées par la porte.

Dans le cas général d'une mesure discrète, voyons comment on peut reconstituer concrètement le signal de manière continue à l'aide du théorème de Shannon.

On supposera que le signal est correctement échantillonné et que le signal d'origine possède une transformée de Fourier limitée en fréquence. Pour comprendre le « mécanisme » du théorème on prendra le cas simple mais général d'une mesure discrète sur trois points : la mesure donne 1 au point 1, 0.5 au point 2, 0.75 au point 3 ; la mesure est échantillonnée avec la période T .

La formule d'interpolation de Shannon consiste à centrer un sinus cardinal normalisé sur chacun des trois points (c'est le rôle du terme $(t - n.T)$ en argument du sinc), le maximum de chaque sinc vaut la valeur de la mesure en ce point (c'est le rôle du facteur $x[n.T]$ devant le sinc), les zéros des différents sinc sont confondus avec les points mesurés (c'est le rôle du terme $1/T$ en argument du sinus). On obtient la configuration suivante :



On peut alors reconstituer chaque point du signal initial. Nous désirons par exemple connaître la valeur du point (indiqué en marron) situé entre les deux premiers points de mesure, la valeur de la mesure en ce point est la somme des valeurs de tous les sinus cardinaux en ce point, soit $a+b+c$, c étant une valeur négative.

On remarque l'utilité de faire coïncider les zéros des sinus cardinaux avec les valeurs connues car en un point de mesure il n'y a alors qu'un seul sinc non-nul, celui qui est centré sur la mesure et dont le maximum vaut la valeur de la mesure en ce point : les valeurs connues ne sont donc pas modifiées.

On remarque que ce procédé n'admet pas de divergence (valeur de mesure infinie) ou de point non défini car les valeurs des mesures correspondent aux maximum des sinc, ceci est en accord avec la limitation en fréquence de la transformée de Fourier du signal.

Dans le cas d'un grand nombre de points, on se rend bien compte que l'influence des points les plus éloignés du nouveau point calculé sera faible du fait de l'amortissement rapide du sinus cardinal. Le théorème d'interpolation de Shannon introduit donc une sorte de pondération dans l'importance des mesures en fonction de leur éloignement avec le nouveau point considéré.

Ce théorème est donc extrêmement efficace car, ayant la possibilité de connaître la valeur de la mesure en chaque point, on peut connaître la valeur de la mesure de manière continue.

Nous avons donc explicité le théorème d'interpolation de Shannon. Ce théorème est valable pour une mesure à une dimension : le point 1 vaut 1, le point 2 vaut ... Mais il serait intéressant de pouvoir appliquer un tel procédé d'interpolation à une mesure en deux dimensions : le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1 vaut 1, le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 2 vaut ... Afin de pouvoir appliquer ce procédé sur une mesure à deux dimensions, typiquement une matrice carrée, nous généralisons le théorème d'interpolation de Shannon :

Théorème d'interpolation de Shannon à deux dimensions :

L'ensemble des points du signal d'origine $z(x,y)$ s'obtient par la relation :

$$z(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(nT,mT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{x-nT}{T}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{y-mT}{T}\right)$$

T étant la période d'échantillonnage commune à x et y de la mesure discrète.

Conditions limites :

- i) Le signal d'origine $z(x,y)$ doit posséder une transformée de Fourier limitée en fréquence
- ii) La condition du théorème d'échantillonnage de Shannon doit être vérifiée

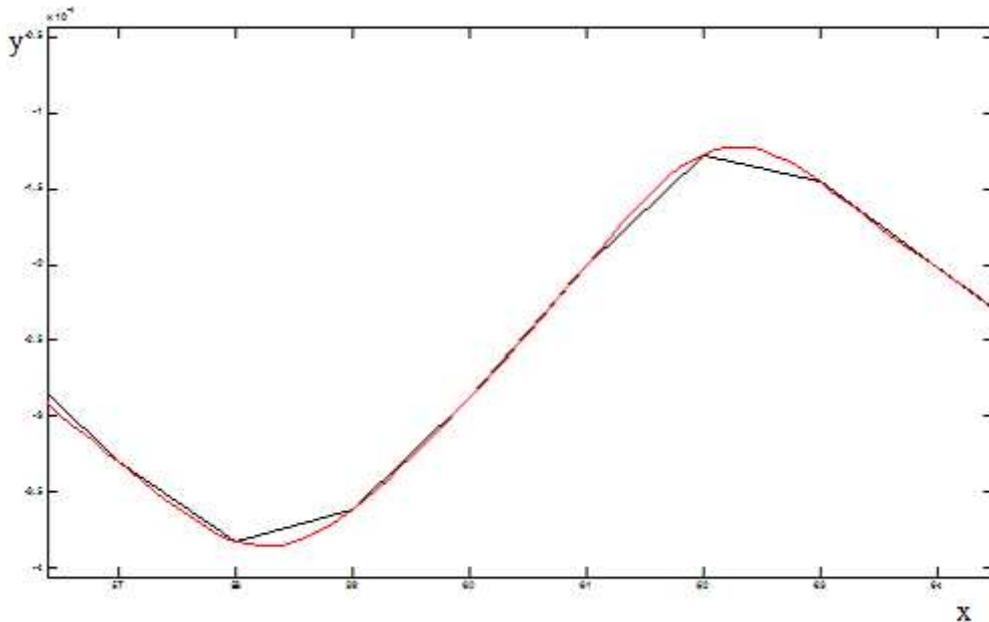
2.2 ILLUSTRATIONS

Afin d'illustrer la méthode d'interpolation par le théorème de Shannon nous créons deux programmes MatLab[®], le premier étant un programme d'interpolation à une dimension (cf. annexe I) et le second un programme d'interpolation à deux dimensions (cf. annexe II). On notera en remarque que l'ensemble des simulations numériques est réalisé avec MatLab[®].

Ces programmes permettent de connaître la valeur de la mesure en tous point, par conséquent ils permettraient de reconstituer le signal en continu de manière idéale. Mais pour augmenter la résolution de la mesure nous n'avons pas besoin d'un signal continu, il nous faut plutôt un signal discret qui comporte une plus grande quantité de points que le signal d'origine.

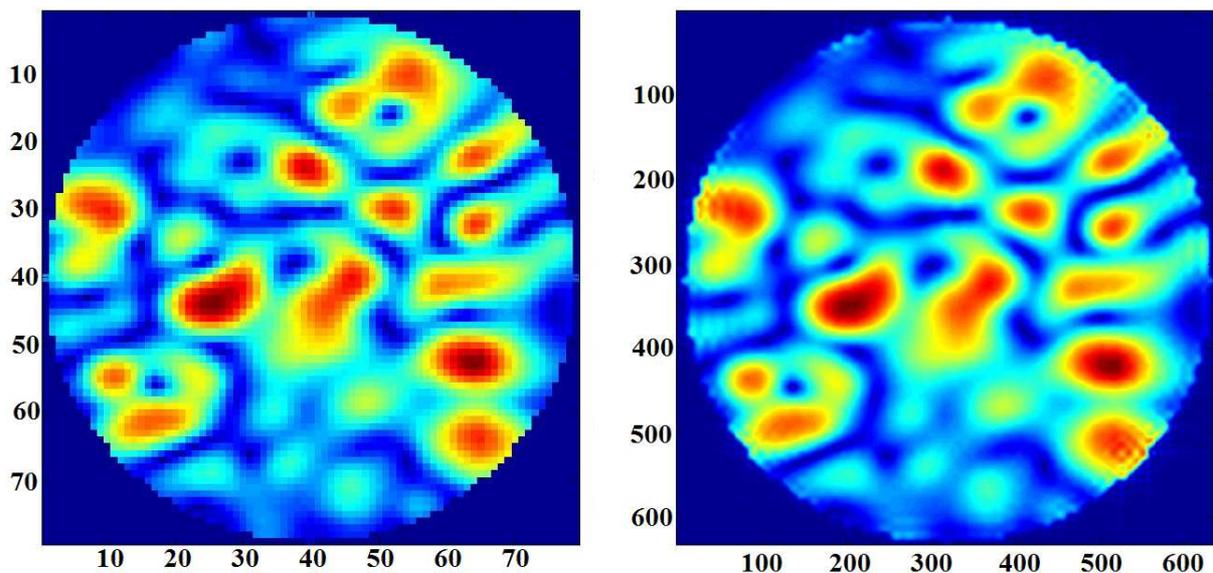
Le premier programme est appliqué sur une matrice 1x40 qui correspond à une mesure discrète de 40 points. Le programme d'interpolation permet d'augmenter la résolution de la mesure d'un facteur r , pour cette illustration nous avons choisi $r = 10$. Nous avons aussi créé un petit programme annexe qui permet de choisir le nombre de points souhaité (cf. annexe I(bis)). Ayant une matrice, la fréquence d'échantillonnage de la mesure sera toujours $T=1$.

Puis on trace sur le même graphe les deux mesures, en noir la mesure d'origine, en rouge la mesure interpolée d'un facteur 10.



On remarque que la courbe est lissée du fait de l'augmentation du nombre de points.

Puis on applique le second programme d'interpolation sur une matrice 79×79 , cette matrice est un tableau de données issu des résultats de l'expérience de mesure du champ micro-onde en sortie du tube, il s'agit de la deuxième expérience citée en introduction. La mesure ne fournit pas de résultat pour tous les points de la matrice carrée mais seulement pour ceux qui correspondent à la sortie du tube, ces points forment donc un disque. Cette matrice de mesure possède donc des points indéfinis, mais comme ceci est incompatible avec le théorème d'interpolation nous mettons des 0 à la place des points non mesurés (les 0 non pas d'incidences sur la méthode d'interpolation car ils correspondent alors aux maximum des sinc en ces points). Puis nous appliquons le programme d'interpolation à la partie réelle de la matrice d'origine, on augmente ici la résolution d'un facteur 2.



Représentation des données (module du champ électrique) avec à gauche la résolution d'origine et à droite une résolution multipliée par 8.

Les applications montrent l'efficacité de la méthode numérique de Shannon.

On ne peut évidemment interpoler que des matrices réelles, nous pouvons donc représenter soit la partie réelle, soit la partie imaginaire soit le module du champ électrique.

On peut remarquer qu'il est impossible de distinguer d'éventuels détails entre deux nouveaux points calculés.

Nous disposons donc d'une méthode numérique efficace permettant dans le cas le plus général possible d'augmenter la résolution d'une mesure quelconque.

Nous pouvons désormais appliquer cette méthode à la cartographie d'un champ speckle.

3. SINGULARITES DE PHASE

Revenons au cas particulier des figures de speckle issues de l'expérience du tube constituant un milieu fortement diffusif.

Les résultats sont stockés sous la forme de matrices complexe comme nous l'avons dit en introduction. Il existe des points qui sont des vrais zéros d'intensité (parties réelle et imaginaire nulles). En ces points, la phase n'est pas définie, en effet $E=A.e^{i\varphi}$ et si $A=0$ alors on ne peut pas déterminer φ : on parle alors de singularités de phase.

Grace à la méthode d'interpolation développée précédemment nous allons pouvoir observer les singularités de phase et vérifier les caractéristiques principales de celles-ci.

3.1 LOCALISATION DES SINGULARITES

Afin d'étudier les singularités, il nous faut les localiser numériquement sur une figure de speckle.

Pour trouver les singularités on pourrait chercher les points où la partie réelle du champ est nulle, les points où la partie imaginaire est nulle et prendre l'intersection de ces deux ensemble. Cette méthode serait tout à fait envisageable mais nous préférons choisir une méthode qui met en valeur une des caractéristiques des singularités.

Les résultats de l'expérience sont stockés sous la forme de matrices complexes 79×79 (chaque matrice correspond à une fréquence donnée). Or un nombre complexe est défini à un facteur de phase 2π près. De plus nous savons que le champ complexe est continu et que la phase elle par contre est discontinue. Lorsque l'on « tourne » autour d'une singularité, la continuité du champ complexe impose que l'on retombe sur la même valeur complexe, cette condition impose donc que la phase ait tourné de 2π . Cette caractéristique est générale : la phase tourne de 2π autour d'une singularité.

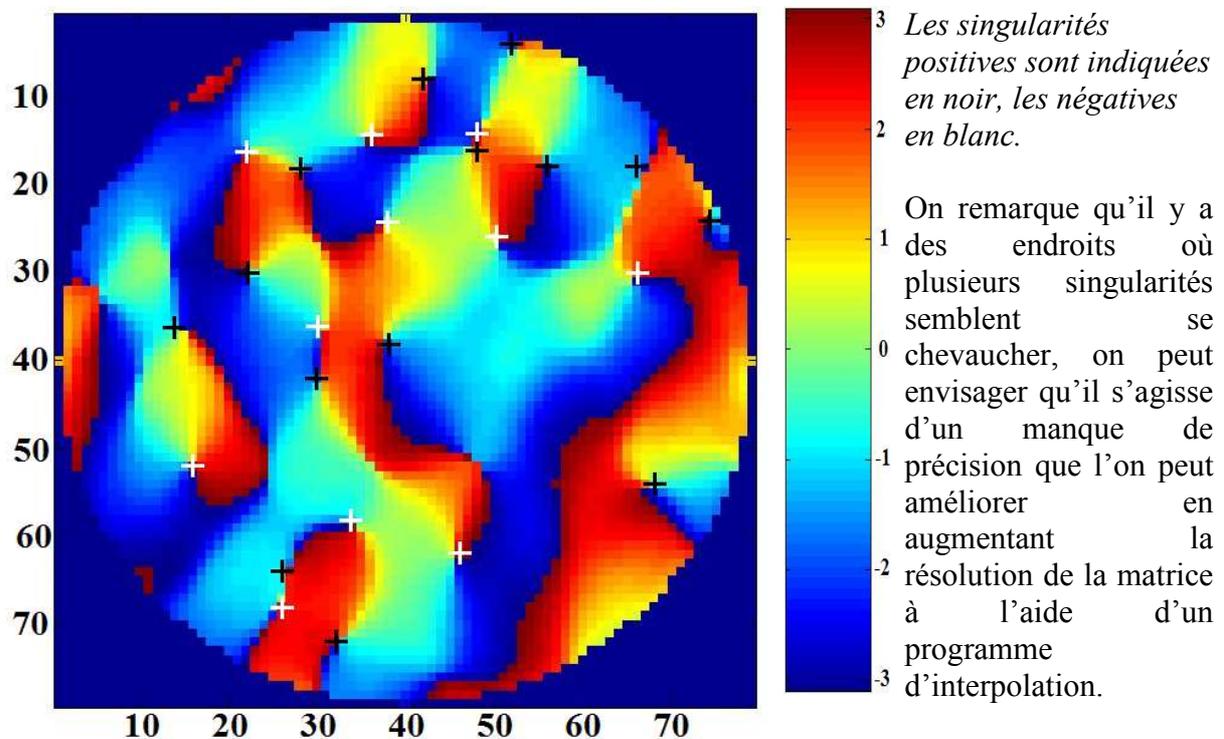
Nous disposons donc d'un critère général, applicable à la matrice des phases, qui permette de déterminer l'emplacement des singularités : on calcule la circulation de la phase sur un contour fermé en chaque point et on est sûr d'avoir localisé une singularité lorsque cette circulation vaut 2π .

Nous notons en remarque qu'en réalité la circulation peut valoir 2π ou -2π , suivant le sens dans lequel tourne la phase.

Dans le cas précis de nos résultats discrets cette circulation sera calculer numériquement et à partir des points les plus proches du point considéré, nous créons donc un programme qui localise les singularités en calculant des circulations et qui donne leur signe, ce programme MatLab[®] s'applique sur la matrice de phase (cf. annexe III).

On remarque que la méthode qui consiste à chercher les points qui ont une partie réelle et imaginaire nulles ne nous permettait pas de connaître le signe des singularités.

On trace ensuite la figure de phase, on remarque bien que la phase tourne autour de chaque singularité car les couleurs se succèdent autour des points. Autour des singularités positives la phase tourne de -2π à $+2\pi$ dans le sens anti-trigonométrique ; autour des négatives la phase tourne de $+2\pi$ à -2π dans le sens anti-trigonométrique. Le code de couleurs permet de connaître la valeur de la phase en un point et de se rendre compte du sens de rotation de celle-ci.



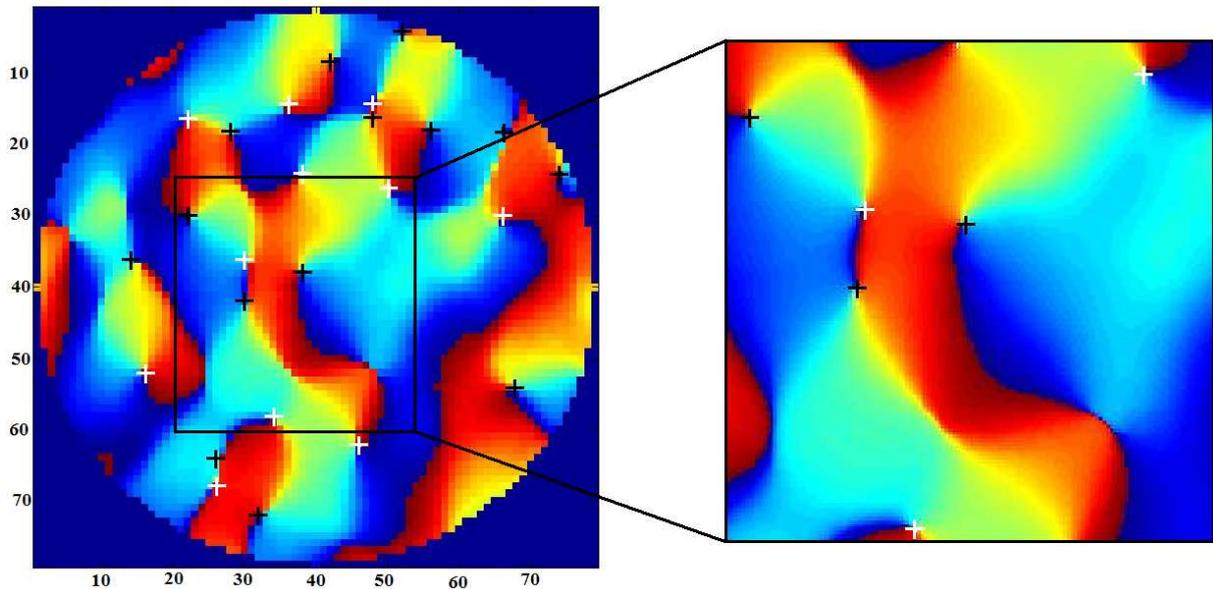
Le programme fournit en sortie les coordonnées des singularités ainsi que leur signe suivant la convention du sens anti-trigonométrique.

Nous avons désormais une localisation approximative des singularités, et nous pouvons connaître leur signe. Ce qui nous intéresse maintenant c'est de pouvoir nous approcher autant que nous voulons d'une singularité en zoomant en quelque sorte sur l'une d'entre elle afin d'étudier ses caractéristiques, pour ce faire nous utiliserons la méthode d'interpolation.

3.2 AUTOUR D'UNE SINGULARITE

Posons le problème : le speckle possède des caractéristiques particulières, on y trouve en effet des singularités de phase autour desquelles les lignes d'équiphase, d'équi-intensité et d'équicourant ont des formes particulières (cf. réf. n°1 & réf. n°2). On observe en effet que les lignes d'équiphase sont des droites, les lignes d'équintensité sont des ellipses et les lignes d'équicourant sont des cercles. Ces propriétés sont valables lorsque l'on s'approche très près des singularités. Afin de vérifier ces propriétés nous isolons donc une singularité.

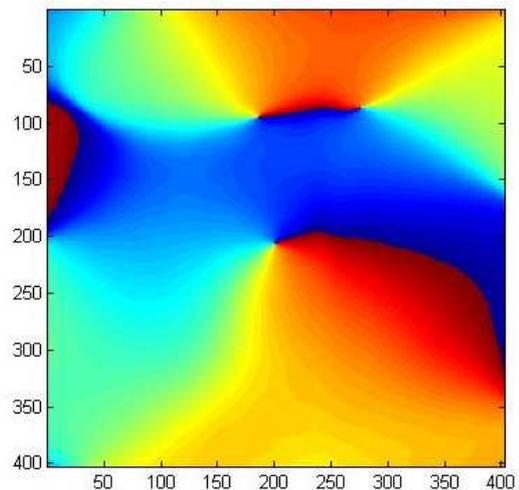
Pour ce faire nous choisissons une partie de la matrice de phase contenant des singularités et nous interpolons (d'un facteur 4) à l'aide du programme d'interpolation en 2 dimensions.



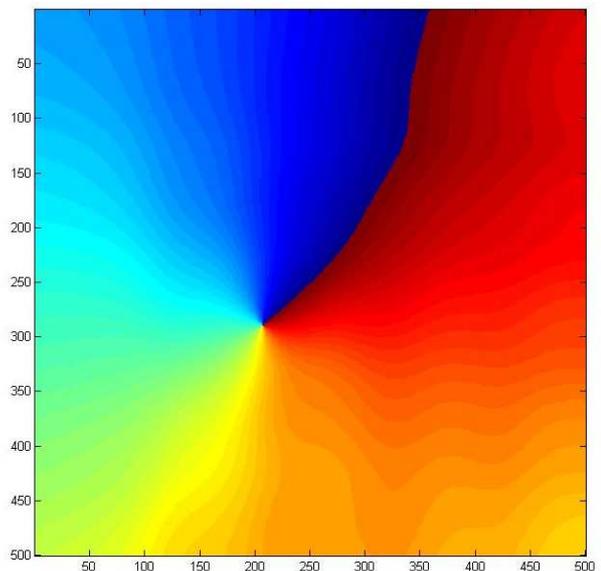
A gauche la représentation de la matrice de phase, à droite celle d'une partie de la matrice que l'on a interpolée 4 fois. Nous nous sommes bien approchés des singularités.

En renouvelant cette opération on peut isoler les singularités afin d'étudier leurs caractéristiques. Lorsque l'on dit que les équiphasés sont des droites autour de la singularité, il s'agit en fait de la « forme limite » que peuvent prendre ces lignes lorsque l'on s'approche infiniment près de la singularité qui par définition est inatteignable.

Représentation de 3 singularités sur une figure de phase interpolée d'un facteur 16.



Nous observons que cette méthode a des limites en dehors des conditions d'application du théorème de Shannon. Nous sommes en effet confrontés à des effets de bord dès que nous interpolons. Les points qui sont au bord sont moins bien définis car ils sont calculés sur un nombre de points plus faible que les points au centre de la matrice. Lorsque l'on interpole une matrice déjà interpolée on accumule une erreur due aux effets de bord. Cette erreur accumulée est visible autour de la singularité, il s'agit des vaguelettes qui apparaissent sur l'image ci-contre (interpolée d'un facteur 50).

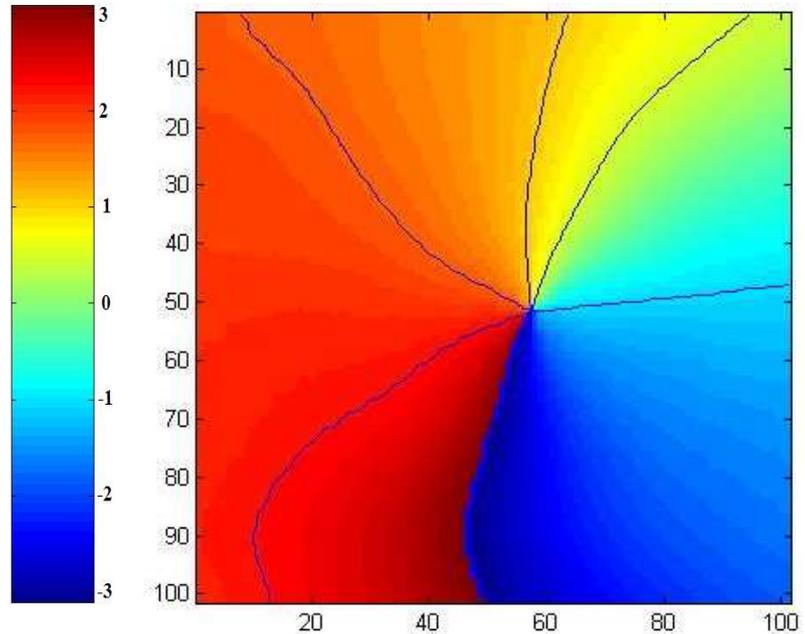


3.3 LIGNE D'EQUIPHASE

Afin de vérifier la propriété sur les lignes d'équiphase nous traçons les lignes de même phase sur une singularité interpolée. Plus on se rapproche de la singularité plus les lignes d'équiphase sont des droites.

Sur cette figure nous avons tracé les lignes d'équiphase pour les valeurs : {0.5 ; 1.75 ; 2.25 ; 4.0 ; 6.2} radiant.

Autour de la singularité les équiphases sont des droites, lorsque l'on s'éloigne elles ne sont plus rectilignes.

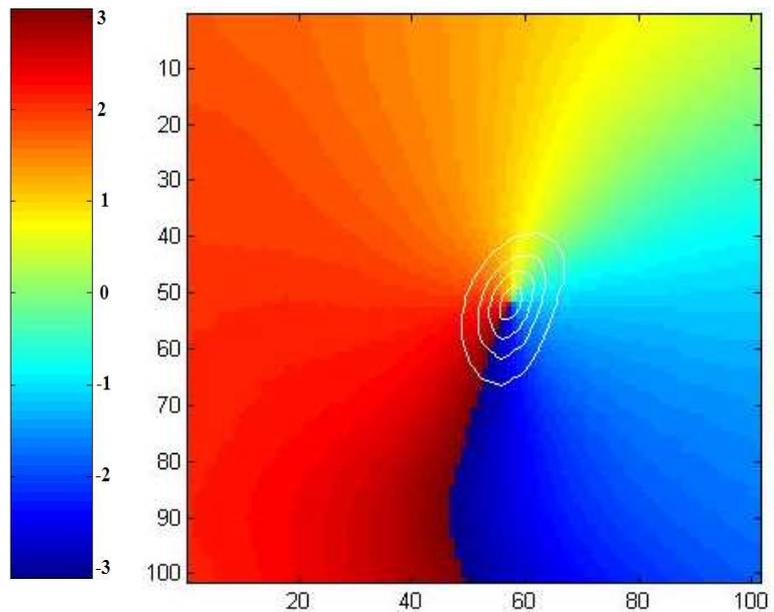


3.4 LIGNE D'EQUI-INTENSITE

L'intensité d'un champ complexe I est la somme des carrés de sa partie réelle et imaginaire, $I = \text{Re}(E)^2 + \text{Im}(E)^2$. Nous traçons les lignes d'équi-intensité autour d'une singularité interpolée.

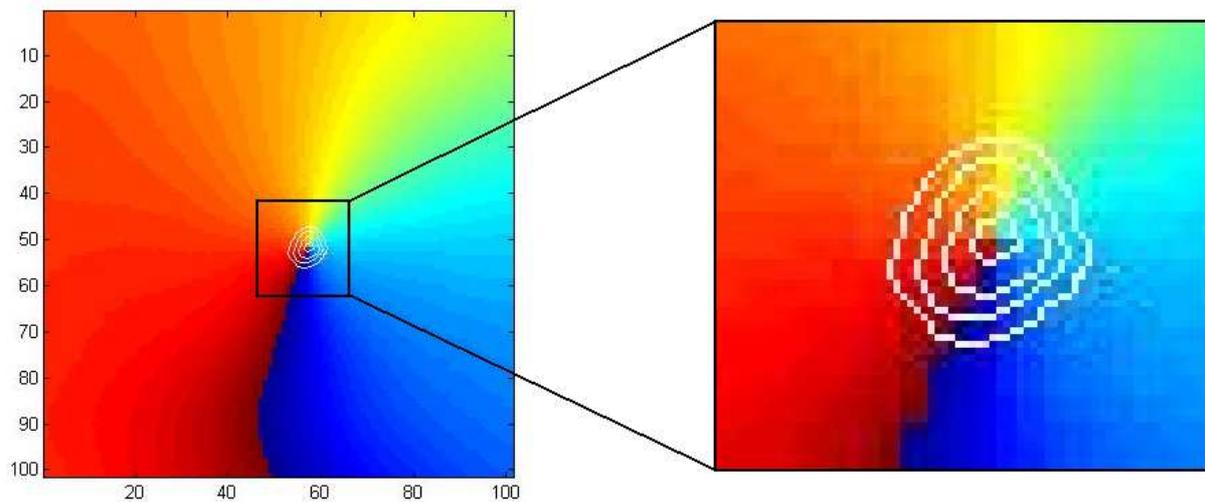
On observe que les lignes d'équi-intensité sont des ellipses autour de la singularité.

Nous avons tracé les lignes d'intensité :
0.0009. 10^{-5}
0.0001. 10^{-5}
0.0004. 10^{-5}
0.002. 10^{-5}



3.5 LIGNE D'ÉQUICOURANT

On calcule la magnitude de courant C avec la relation : $C = | \text{Im}(E^* \cdot \text{grad}(E)) |$ (cf. réf. n°2). Puis on trace les lignes d'équicourant pour les valeurs : $0.02 \cdot 10^{-8}$; $0.04 \cdot 10^{-8}$; $0.06 \cdot 10^{-8}$ et $0.08 \cdot 10^{-8}$.



On observe que les lignes d'équicourant sont des cercles (approximativement). La précision des formes est limitée par la résolution. Nous avons tracé des lignes pour des faibles valeurs de courant, puis nous avons zoomé pour rendre plus visible les cercles de courant.

4. CONCLUSION

Nous avons donc appliqué une méthode d'interpolation à la cartographie d'un champ speckle issu d'une expérience mettant en œuvre la propagation de micro-ondes dans un milieu diffusif. Cette méthode nous a permis de nous approcher au plus près des singularités de phase afin de retrouver leurs caractéristiques. Nous avons étudié les singularités à une fréquence donnée, mais il peut être intéressant de se demander quel est le comportement des singularités lorsque l'on se déplace de fréquence en fréquence ? Cette question, abordée durant le stage, n'a pas été développée dans cet exposé mais le sera sur la page web qui présentera nos résultats.

5. REFERENCES

1. **Sheng Zhang, Bing Hu, Yitzchak Lockerman, Patrick Sebbah, and Azriel Z. Genack** ; “*Observation of singularities in multiply scattered microwave fields*”, 27 Mars 2007.
2. **V. Berry** ; “*Singularities in waves and rays*”, Physique des défauts, (Les. Houches, France).
3. **Wikipedia, free encyclopedia** ; “*Nyquist-Shannon sampling theorem*”.
4. **Wikipedia, free encyclopedia** ; “*Whittaker-Shannon interpolation formula*”.
5. **Wikipedia, free encyclopedia** ; “*Speckle pattern*”.
6. **Laboratoire Jacques-Louis Lions** ; www.ann.jussieu.fr, ‘Apprendre à utiliser le logiciel *MatLab*[®]’.
7. **Wikipedia, free encyclopedia** ; “*Lagrange Polynomial*”.

6. ANNEXES

■ ANNEXE I : Programme d’interpolation à une dimension

v : vecteur à interpoler, *Y* : vecteur interpolé, *r* : rapport ancienne/nouvelle résolution et *T* : distance entre deux points

```
function [Y] = interpolation_1D (v,r)
n=length(v);      % Calcul de la taille de v
Y=zeros(1,r*n);  % Création du vecteur Y qui est rempli avec des zéros

for p=1:r*n,      % Pour créer chaque nouveau point un par un
    Z=sinc((p/r -[1:n]*1)/1); % Création d'un vecteur contenant tous les sinus cardinaux
    Y(1,p)= sum(v(1,:).*Z); % Produit scalaire du vecteur à interpoler avec le vecteur sinus
    cardinal
end

% Affichage du résultat final

plot([1:n],v(1:n),'blac') % Affichage de la courbe de départ
hold on                  % Permet la superposition de deux courbes
plot(([1:r*n]/r),Y(1:r*n),'r') % Affichage de la courbe interpolée en rouge (remise à
l'échelle de départ)
```

■ ANNEXE I bis : Programme d’interpolation à une dimension, avec le nombre de points souhaités

Il s’agit de rajouter la ligne de commande : $r = N/n$ (calcul de la résolution *r*) au programme précédent et de remplacer *r* par *N* en argument de **function**.

■ ANNEXE II : Programme d'interpolation à deux dimensions

V : matrice à interpoler, X : la matrice interpolée et r : rapport nouvelle/ancienne résolution

```

function [X] = interpolation_2D (V,r)
t=length(V); % Calcul de la taille de V
Y=zeros(r*t,r*t); % Création de la matrice Y qui est rempli avec des zéros
Z=zeros(r*t,r*t); % Création de la matrice Z qui est rempli avec des zéros

[N,M] = meshgrid(1:t,1:t) % Créé une mat 10x10 N aux lignes identiques et aux colonnes
remplies de 1 à 10 et une mat 10x10 M aux colonnes identiques et aux lignes remplies de 1 à
10
for q=1:r*t, % Pour avancer dans la matrice interpolée
    q % Affiche l'état d'avancement du programme
    for p=1:r*t, % Pour avancer dans la matrice interpolée
        Y = sinc((p/r -N*1)/1);
        Z = sinc((q/r -M*1)/1);
        SIN = Y.*Z; % Matrice contenant tous les sinus cardinaux (effectue un produit terme à
terme de Y et Z)
        X(p,q) = sum(sum(V.*SIN)); % Somme de tous les éléments de la mat V.*SIN (qui est
un produit terme à terme de la mat à interpoler avec celle des sinus)
    end
end

```

■ ANNEXE III : Programme de détection des singularités

% Y donne les coordonnées des singularités positives et Z celles des négatives

```

function [Y,Z] = singularite (V)
n = length(V);
Y = zeros(n*n,2);
Z = zeros(n*n,2);
a = zeros(9,1);
i=1;
j=1;

for x=1:(n/2)-1, % pour avancer point par point
    for y=1:(n/2)-1,
        % repérage des huit points voisins
        p = x*2;
        q = y*2;
        a(1,1) = V(p-1,q-1);
        a(2,1) = V(p,q-1);
        a(3,1) = V(p+1,q-1);
        a(4,1) = V(p+1,q);
        a(5,1) = V(p+1,q+1);
        a(6,1) = V(p,q+1);
        a(7,1) = V(p-1,q+1);
        a(8,1) = V(p-1,q);
        a(9,1) = V(p-1,q-1);
    end
end

```

```

b = unwrap(a); % pour déplier la phase
c = b(9,1) - b(1,1);

if (c > 2*pi - 0.01) % test pour savoir si on a une singularité positive
    Y(i,1)=q;
    Y(i,2)=p;
    i=i+1;
elseif (c < -2*pi + 0.01)
    Z(j,1)=q;
    Z(j,2)=p;
    j=j+1;

end
end
end

if i==1
    Y=zeros(1,2);

else
    i = i-1;
    Y= Y(1:i,1:2);
end

if j==1
    Z=zeros(1,2);
else
    j = j-1;
    Z= Z(1:j,1:2);
end

```