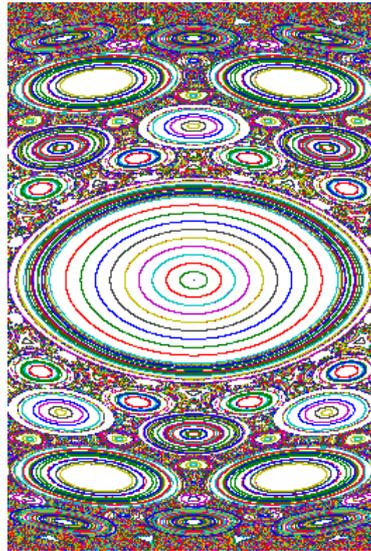


**Licence de Physique**  
**Rapport de stage en laboratoire**

**JOUER AVEC DES BILLARDS**  
**OPTIQUES**



**COSSETTINI Amandine**  
**GUSTAVE François**  
**MONLOUBOU Martin**

**Encadrant : DOYA Valérie**

## Sommaire

<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 Dynamique des rayons en fonction de la géométrie du billard</b>	<b>2</b>
2.1 Billard circulaire : $w = 2$ – Billard demi-circulaire : $w = 1$ . . . . .	3
2.2 Billard tronqué à plus de la moitié : $1 < w < 2$ . . . . .	4
2.3 Billard tronqué à moins de la moitié : $0 < w < 1$ . . . . .	4
2.4 Influence de la géométrie sur la dynamique des rayons . . . . .	5
<b>3 Section de Poincaré et stabilité des orbites</b>	<b>5</b>
3.1 De la trajectoire des rayons à la section de Poincaré . . . . .	5
3.2 Espace des phases d'un billard circulaire à troncature variable. . . . .	7
3.3 Stabilité des orbites . . . . .	9
<b>4 Etude approfondie du billard mixte</b>	<b>10</b>
4.1 Résonances simples. . . . .	10
4.2 Résonances secondaires . . . . .	11
4.3 Mer chaotique . . . . .	12
4.4 Dynamique générale d'un système mixte . . . . .	13
<b>5 Conclusion</b>	<b>13</b>
<b>Remerciements</b>	<b>13</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>13</b>

# 1. Introduction

Avez-vous déjà joué au billard ? La réponse à cette question est positive pour une grande majorité! Mais avez-vous déjà joué au billard en interposant un obstacle au milieu de celui-ci? Ou encore pour lequel les contours formeraient, non plus un rectangle, mais un trapèze par exemple? Autrement dit, vous êtes-vous déjà rendu compte de la complexité que peut avoir ce jeu si l'on modifie sa géométrie habituelle? Car oui, en effet, le chemin emprunté par des boules dans un billard, c'est-à-dire un système fermé à deux dimensions, peut très vite devenir compliqué... Le propos ici est d'étudier l'influence que peut avoir la géométrie sur les trajectoires de ces boules.

En choisissant un billard circulaire de rayon  $R$ , avec une troncature droite dont la largeur variable est  $w \cdot R$  - où le coefficient  $w$  est compris dans l'intervalle  $[0;2]$  - on peut distinguer trois cas.

Pour  $w=1$  et  $w=2$  (respectivement billards demi-circulaire et circulaire), les nombres de quantités physiques conservées, ici l'énergie  $E$  et le moment angulaire  $M$ , et de degrés de liberté étant égaux, on parle de système intégrable, *i.e.*, les équations du mouvement sont solubles. Pour de telles configurations, la dynamique est dite **régulière**.

En revanche, lorsque  $1 < w < 2$ , le moment angulaire n'est plus conservé. On ne peut plus résoudre analytiquement les équations du mouvement, ce qui rend le système non intégrable. La dynamique est qualifiée de **chaotique**. Il s'agit ici d'un chaos déterministe, ce qui signifie que, d'une part, la trajectoire des boules est extrêmement sensible aux conditions initiales et que, d'autre part, elle est asymptotiquement non prévisible et « présente les caractéristiques d'une dynamique aléatoire »<sup>[1]</sup>, bien que l'on puisse suivre pas à pas le trajet des boules.

Enfin, si  $0 < w < 1$ , les deux types de dynamique précédemment cités coexistent, et seules les conditions initiales déterminent la nature régulière ou chaotique de la trajectoire. Ces particularités définissent ce que l'on appelle un **système mixte**.

Nous nous intéresserons dans le cadre de notre projet à un billard dit optique, dans lequel nous nous amuserons à envoyer des rayons lumineux. Les contours où rebondissent les boules sont alors « remplacés » par des surfaces réfléchissantes qui répondent aux lois de Snell-Descartes. Dans sa limite géométrique (lorsque la longueur d'onde est petite devant les dimensions caractéristiques du système), le comportement de la lumière peut être assimilé à celui des rayons. Ainsi l'étude de la dynamique des rayons permet-elle de caractériser celle de la lumière dans ce cas. Mais la lumière est avant tout une onde électromagnétique! La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible de retrouver des similitudes entre les propriétés du comportement des rayons dans un billard et celui d'une onde lumineuse se propageant dans une fibre optique dont le plan transverse peut être vu comme un billard. C'est la question développée dans la problématique générale du chaos ondulatoire.

**Notre approche portera exclusivement sur le comportement classique de la lumière, c'est à dire l'étude de la dynamique des rayons dans un billard, et plus particulièrement dans le cas d'un système mixte.**

Dans un premier temps nous étudierons les comportements des rayons pour différentes géométries, puis nous introduirons une représentation plus commode pour comprendre la dynamique et enfin nous nous pencherons en détail sur le billard mixte.

## 2. Dynamique des rayons en fonction de la géométrie du billard

On considère un billard circulaire de rayon  $R$ , ayant une troncature droite de largeur variable définie<sup>[2]</sup> par  $w \cdot R$  ( $w$  étant un coefficient appartenant à l'intervalle  $[0,2]$ ) (Fig. 1).

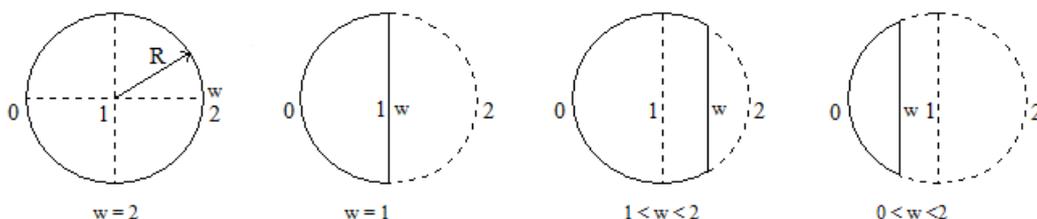


FIGURE 1 : Géométrie du billard en fonction du coefficient  $w$

En fonction de cette troncature (c'est-à-dire de la géométrie du billard), la dynamique des rayons va être différente. Afin de mieux comprendre et visualiser ces comportements, une simulation numérique a été effectuée pour tracer la trajectoire d'un rayon lumineux. Celle-ci est basée sur le principe suivant : connaissant le premier rayon, on calcule le point d'intersection du rayon initial avec le contour et, en utilisant les lois de Snell-Descartes sur la réflexion, on en déduit l'angle réfléchi  $\alpha_1$ . A partir de celui-ci, on détermine le second point d'impact, et on en déduit à nouveau un angle réfléchi  $\alpha_2$  (Fig.2), et ainsi de suite. La dynamique des rayons se résume donc à une suite de réflexions dépendantes les unes des autres et déterminées par la condition initiale du premier rayon.

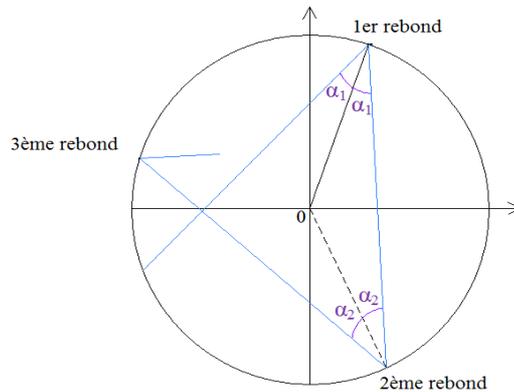


FIGURE 2 : Représentation d'une trajectoire dans l'espace réel pour un billard quelconque

On se propose donc d'étudier le comportement d'une trajectoire pour chaque configuration possible du billard.

### 2.1 Billard circulaire : $w = 2$ – Billard demi-circulaire : $w = 1$

Dans un billard circulaire, lorsque le rayon se réfléchit sur la paroi du billard, et ce, quel que soit le nombre de rebonds effectués, il conserve toujours le même angle  $\alpha_0$  dessinant ainsi une trajectoire régulière qui délimite un contour circulaire interne appelé caustique. La zone cernée par cette dernière n'est jamais explorée par la trajectoire du rayon et sa taille dépend uniquement des conditions initiales : plus l'angle  $\alpha_0$  initial est grand, plus la caustique est grande, et inversement (Fig. 3.a et 3.b). Un comportement identique est observé pour le billard demi-circulaire (Fig. 3.c).

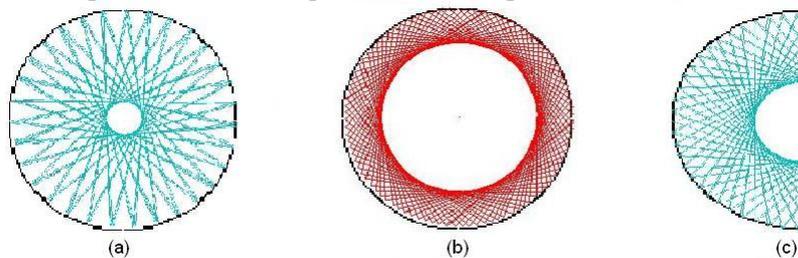


FIGURE 3 : Trajectoire réelle dans un billard circulaire pour  $\alpha_0 = 9^\circ$  (a), pour  $\alpha_0 = 45^\circ$  (b) et dans un billard demi-circulaire  $\alpha_0 = 22.5^\circ$  (c); nombre de rebonds :  $N=100$

On peut observer une trajectoire régulière et délimitée par une caustique dans les 3 configurations

La connaissance des coordonnées initiales  $(x_i, y_i)$  du rayon et de l'angle  $\alpha_0$  que fait celui-ci avec la normale au cercle en  $(x_i, y_i)$  suffit, ici, à décrire l'évolution de sa trajectoire. Cette caractéristique montre bien la **régularité du système**.

Nous pouvons également noter que lorsque  $\alpha_0 = k\pi / N$  [3], où  $N$  est le nombre de rebonds et  $k$  un entier, la trajectoire boucle sur elle-même après  $N$  rebonds et forme alors une **orbite périodique**.

## 2.2 Billard tronqué à plus de la moitié : $1 < w < 2$

La dynamique observée pour un billard tronqué à plus de la moitié ( $1 < w < 2$ ), est très différente de celle décrite précédemment. La trajectoire suivie par un rayon est beaucoup plus complexe : dès qu'un rayon se réfléchit sur la partie plane, l'angle à la réflexion n'est plus conservé et le comportement devient totalement irrégulier. De plus, si l'on considère un grand nombre de rebonds, toute la surface du billard sera entièrement explorée entraînant la disparition de la caustique (Fig. 4).

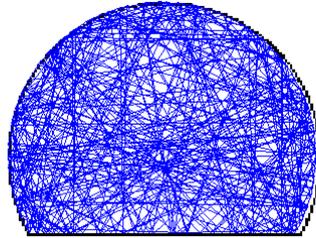


FIGURE 4 : trajectoire réelle dans un billard tronqué ( $1 < w < 2$ ). Nombre de rebonds :  $N=300$

D'autre part, en regardant le comportement de deux rayons initialement très proches (Fig. 5), on constate que leurs trajectoires divergent très rapidement montrant ainsi l'extrême sensibilité aux conditions initiales. On montrera par la suite que cette divergence suit une loi exponentielle. Cette sensibilité est la cause de la complexité des trajectoires dans ce type de billard et caractérise ce que l'on appelle un **système chaotique**.

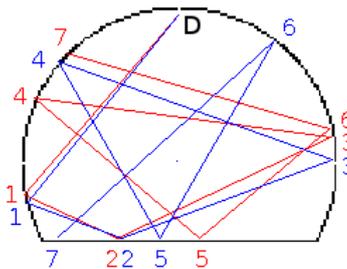


FIGURE 5 : comportement de rayons ayant des conditions initiales très proche, partant d'un même point D

Bien que la trajectoire semble aléatoire (particulièrement aux temps longs), il est possible de suivre la particule rebonds après rebonds, et le chaos caractérisant la dynamique liée à cette géométrie est alors dit **déterministe**.

## 2.3 Billard tronqué à moins de la moitié : $0 < w < 1$

Regardons le comportement des rayons pour différentes conditions initiales, partant d'un point A ou B (Fig. 6). On considère un rayon initial partant du point A, et ayant un angle  $\alpha_0 = 54^\circ$ . La trajectoire de ce rayon est désordonnée : elle explore une grande partie de l'espace de façon irrégulière (Fig. 6.a). Ce comportement est similaire à celui du billard tronqué à plus de la moitié (I.2.). En augmentant légèrement l'angle initial de ce rayon, c'est-à-dire en imposant par exemple  $\alpha_0 = 63^\circ$  au lieu de  $\alpha_0 = 54^\circ$ , on observe un comportement totalement différent. L'évolution de la trajectoire est cette fois-ci ordonnée et confinée entre deux rayons extrêmes que l'on peut assimiler à des caustiques (Fig. 6.b). Pour cette condition initiale, on reconnaît bien un régime régulier semblable à celui obtenu pour un billard circulaire.

Enfin, si l'on s'intéresse à un rayon partant d'un autre point B et ayant un angle initial égal à  $45^\circ$ , on s'aperçoit que les points d'impact du rayon sur le contour du billard s'articulent autour de certains points dessinant ainsi une trajectoire qui semble être régulière (Fig. 6.c).

Pour cette géométrie, nous voyons donc bien que les dynamiques régulières et complexes coexistent et qu'elles sont déterminées par les conditions initiales. Ce système, auquel nous allons particulièrement nous intéresser par la suite, est appelé **système mixte**.

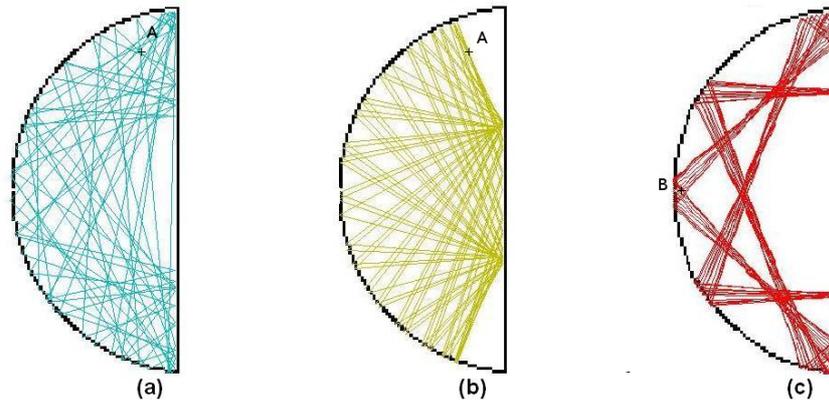


FIGURE 6 : Exemple de trajectoires réelles obtenues dans un billard tronqué pour lequel  $0 < w < 1$ , et pour différentes conditions initiales : (a) coordonnées initiales du rayon en A; angle initiale :  $\alpha_0 = 54^\circ$  : dynamique chaotique; (b) coordonnées initiales du rayon en A; angle initiale :  $\alpha_0 = 63^\circ$  : dynamique régulière; (c) coordonnées initiales du rayon en B; angle initiale :  $\alpha_0 = 45^\circ$  : dynamique stable;

### 2.4 Influence de la géométrie sur la dynamique des rayons

Comme le montrent les différents cas traités précédemment, la dynamique des rayons est définie par la géométrie du billard dans lequel ils évoluent. En effet, en modifiant, même de façon infinitésimale (Fig. 7), un contour de géométrie simple (cercle, carré...), on brise sa symétrie et dès lors, les lois de conservations du système ne sont plus vérifiées. Le système devient donc non-intégrable, *i.e.* on ne peut plus résoudre analytiquement les équations du mouvement de la dynamique, et son évolution chaotique.<sup>1</sup>

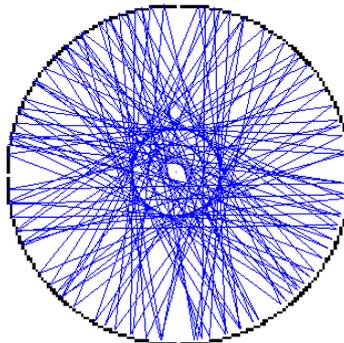


FIGURE 7 : Evolution de la trajectoire dans un billard de troncature  $w=1.99$

## 3. Section de Poincaré et stabilité des orbites

### 3.1 De la trajectoire des rayons à la section de Poincaré

Si le fait d'analyser la trajectoire des rayons permet effectivement de comprendre au premier abord le phénomène mis en jeu, il est cependant clair qu'il nous faut travailler avec une représentation différente si l'on veut avoir des informations plus quantitatives concernant le système. La trajectoire nous donne l'évolution temporelle de notre système, mais si l'on veut étudier la dynamique à proprement parler, c'est alors à l'espace des phases qu'il faut s'intéresser. En effet, celui-ci donne une représentation de la vitesse – ou de l'impulsion – de la particule en fonction de la position occupée par cette dernière.

#### 3.1.1 Un système complexe à deux degrés de liberté

Le billard constitue, comme énoncé plus haut, un système à 2 dimensions et à 2 degrés de liberté; de ce fait les vecteurs position et vitesse de notre particule possèdent chacun deux

<sup>1</sup> Remarque : il existe un grand nombre de billards chaotiques comparé au nombre de billards réguliers.

composantes, respectivement  $(x,y)$  et  $(v_x,v_y)$ . On voit donc que l'espace des phases associé est à quatre dimensions, ce qui n'est clairement pas commode à représenter et encore moins à analyser ! Cependant, nous avons évoqué le fait que l'énergie était une constante du mouvement, le système est donc **conservatif**. Il n'y a donc plus explicitement de dépendance en  $v_x$  et en  $v_y$ , mais uniquement en  $v$ , où  $v$  est le module de la vitesse tel que  $v = (v_x^2+v_y^2)^{1/2}$ . Cela réduit donc la dimension de notre espace des phases à trois, ce qui reste néanmoins toujours complexe à représenter.

### 3.1.2 La méthode de Poincaré

L'espace étant difficilement représentable, il faut analyser de près les trajectoires dans le billard et en dégager des quantités permettant de donner une équivalence à l'espace des phases. Ici, nous avons donc des rayons se propageant en ligne droite, subissant de multiples réflexions sur le contour du billard. Les informations importantes sont donc, d'une part, le point d'impact du rayon sur la paroi, représenté par l'abscisse curviligne, et d'autre part, la direction de propagation après rebond sur le contour, déterminée par l'angle de réflexion. Ainsi l'abscisse curviligne et l'angle de réflexion suffisent-ils à déterminer la trajectoire d'un rayon dans le billard. C'est la méthode qui fut proposée par Henri Poincaré en 1892, puis reprise par Birkhoff en 1932 et qui solutionna alors le problème de la représentation de la dynamique des rayons<sup>[4]</sup>.

On travaille dès lors avec les deux quantités suivantes :

$s$  : l'abscisse curviligne du billard

$p = \sin\gamma$  où  $\gamma$  est l'angle de réflexion, comme l'indique la figure 8 :

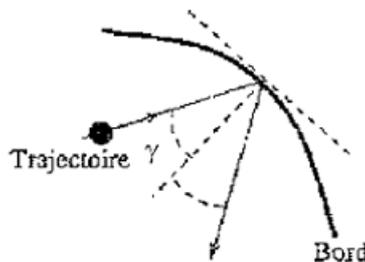


FIGURE 8 : angle de réflexion dans un billard

Ainsi pour un couple de coordonnées  $(s_i,p_i)$ , il sera possible de déterminer le prochain point d'impact de coordonnées  $(s_{i+1},p_{i+1})$  en appliquant la matrice  $T$  telle que :

$$(s_{i+1},p_{i+1}) = T(s_i,p_i)^{[5]}$$

Cette relation définit de façon mathématique la **section de Poincaré**.

La section de Poincaré permet donc de représenter un à un les impacts sur le contour du billard, ce qui nous offre alors une vision **stroboscopique** de la dynamique, où la pseudo-période représente en fait le temps séparant deux réflexions successives ! Notons que, le temps entre deux réflexions n'étant pas nécessairement identique, nous parlons bien ici de pseudo-période et non de période.

Nous allons donc étudier la dynamique de nos rayons dans la section de Poincaré en représentant  $\sin\gamma$  en fonction de  $s$ . La figure 9 donne un exemple de représentation pour 3 rebonds sur le billard :

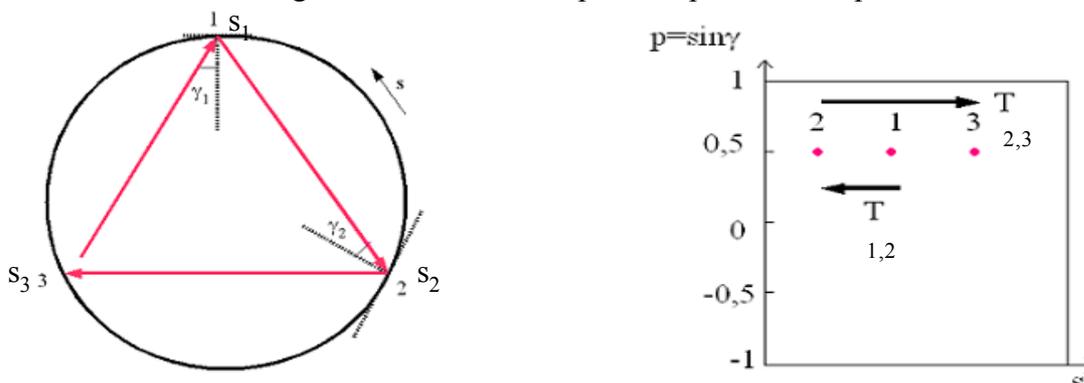


FIGURE 9 : Exemple de représentation de Poincaré pour 3 rebonds dans un billard circulaire

A partir de maintenant nous appellerons cette représentation **espace des phases**.

### 3.2 Espace des Phases d'un billard circulaire à troncature variable

La trajectoire des rayons ayant été présentée précédemment, il est désormais intéressant d'étudier ce que cela donne dans l'espace des phases afin de pouvoir étudier réellement la dynamique des rayons dans le billard puis de comparer les deux représentations et ainsi d'identifier certains types de comportements.

#### 3.2.1 Cas du billard circulaire

Dans un tel cas, nous avons vu que l'angle de réflexion était conservé. Soit  $\gamma_0$  cet angle. Dès lors, la valeur de  $\sin\gamma_0$  est unique. Ainsi, réflexion après réflexion, chaque point aura les mêmes coordonnées dans l'espace des phases, ce qui entraîne un alignement des points sur une même droite d'équation  $p = \sin\gamma_0 = \text{constante}$  (Fig. 10)

Par ailleurs, en considérant un comportement asymptotique, à savoir pour un très grand nombre de rebonds dans le billard, la représentation dans l'espace des phases sera donc une droite.

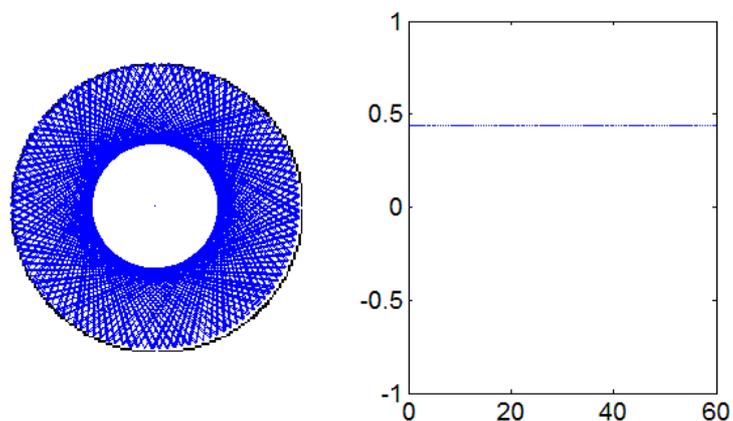


FIGURE 10 : *A gauche, géométrie du billard considéré et trajectoire des rayons, à droite, l'espace des phases associé où l'on voit bien l'alignement des points sur une même droite*

#### 3.2.2 Billard circulaire tronqué à dynamique chaotique

Il s'agit donc ici de s'intéresser à l'espace des phases dans le cas où l'on tronque le billard au delà de son rayon (coefficient de troncature  $w > 1$ ). Dans un tel cas, nous avons vu plus haut que pour un nombre de rebonds suffisant, la trajectoire des rayons occupait tout le billard. Il en est donc de même dans l'espace des phases (Fig. 11), où les points de coordonnées  $(s_i, p_i)$  tendent asymptotiquement à occuper uniformément tout l'espace. Une propriété est tout à fait remarquable dans ce cas. En effet, si d'une part, on envoie un seul rayon et que l'on considère un très grand nombre de rebonds, alors l'espace des phases est entièrement occupé. Si d'autre part on envoie un très grand nombre de rayons et que l'on analyse l'espace des phases pour un temps court, alors on observe exactement la même chose que dans le cas précédent. Cela garantit le caractère **ergodique**<sup>[1]</sup> de la dynamique, à savoir que la moyenne temporelle du phénomène est égale à sa moyenne d'ensemble.

On constate également sur la figure 12 la présence de deux bandes distinctes dans l'espace des phases pour  $\sin\gamma = 0$  (donc pour  $\gamma = 0$ ), centrées sur les abscisses curvilignes  $s_1$  et  $s_2$ . Cela correspond donc à une série d'incidences normales sur le contour du billard autour de l'orbite périodique du grand diamètre, qui est parallèle à la troncature. Cette orbite se retrouvant aussi dans le billard circulaire, nous pouvons en déduire que dans ce cas précis, la géométrie n'influence pas la dynamique, tant que le rayon ne rencontre pas la troncature. Par conséquent, un rayon qui suit cette orbite va laisser une signature dans l'espace des phases, qui tend à disparaître asymptotiquement.

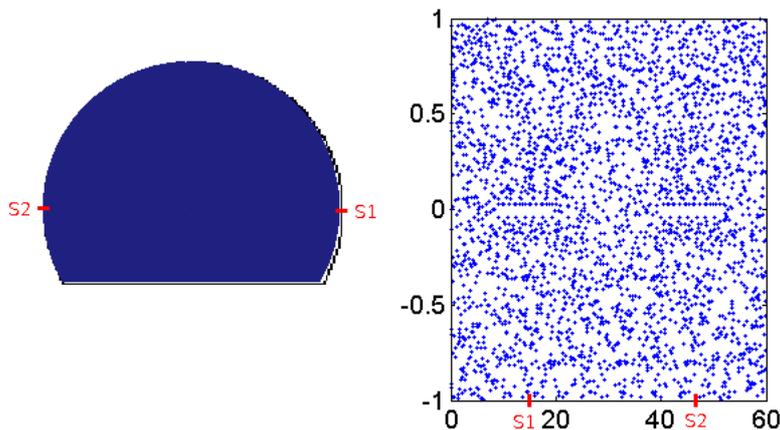


FIGURE 11 : *Espace des Phases d'un billard tronqué à dynamique chaotique*

### 3.2.3 Le Billard circulaire tronqué à dynamique mixte

C'est le cas auquel nous nous intéressons particulièrement dans ce rapport et dont nous parlerons plus en détail dans les pages qui suivent. Il a donc été vu pour ce billard qu'on observe à la fois des comportements régulier et chaotique, ce qui caractérise un système mixte. Ce type de système étant décrit plus loin, on se contentera ici d'exposer les différents espaces des phases obtenus pour des troncatures variables (Fig. 12), avec bien sûr la condition nécessaire sur le coefficient  $w$  :  $0 < w < 1$ .

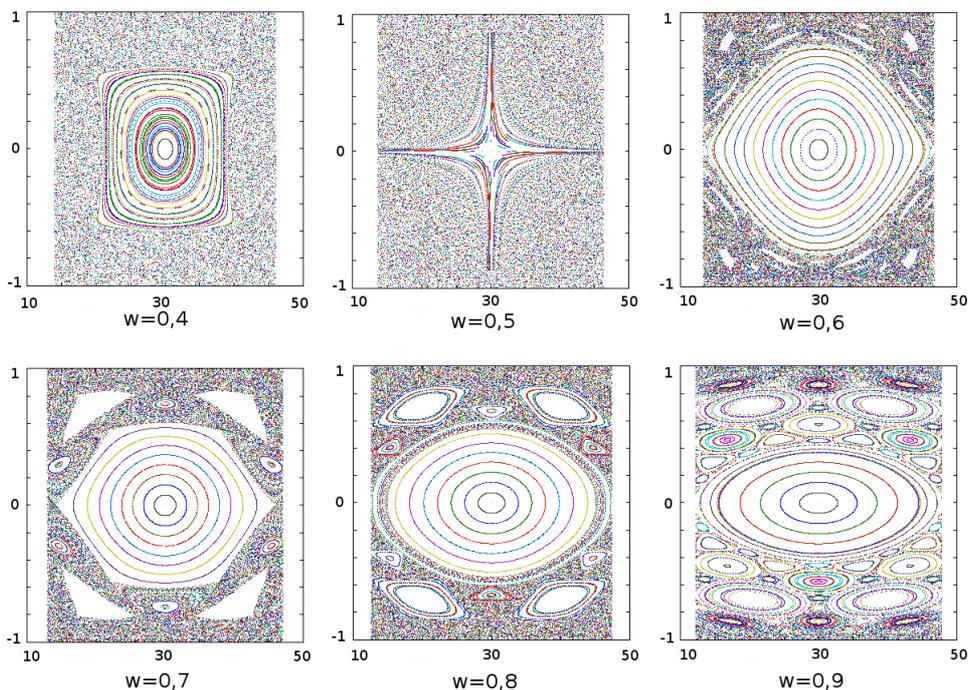


FIGURE 12 : *Espace des phases d'un système mixte pour différentes troncatures du billard,  $w$  variant de 0,4 à 0,9*

On voit alors à partir de cette figure la grande richesse d'un système mixte qui offre des espaces des phases différents, et donc des dynamiques différentes, selon la largeur de la troncature, contrairement au cas d'un billard chaotique où la dynamique est indépendante de ce paramètre!

### 3.3 Stabilité des orbites

#### 3.3.1 Approche qualitative - orbite à deux rebonds

La modification du comportement des rayons en fonction de la géométrie nous amène à nous demander comment cette dernière influe sur les orbites périodiques, i.e, les trajectoires qui bouclent sur elles-mêmes après un certain temps. Considérons une orbite périodique simple, dite à deux rebonds, construite à partir d'un rayon partant du point B (comme indiqué sur la figure 5) avec un angle initial  $\alpha_0$  nul. Le principe consiste alors à étudier une trajectoire envoyée le long de cette orbite périodique, avec un décalage angulaire  $\delta\alpha$  infinitésimal de l'ordre de  $10^{-5}$  radians.

Pour le billard circulaire (et demi-circulaire), les effets du décalage angulaire ne sont visibles qu'à partir d'une certaine de rebonds (Fig. 13.a). Cette infime déviation de la trajectoire garantit le caractère **stable** de l'orbite périodique.

En revanche, dans le cas d'un billard tronqué ( $1 < w < 2$ ), la trajectoire du rayon diverge très rapidement (Fig. 13.b), montrant une fois de plus l'extrême sensibilité aux conditions initiales. Comme le moindre écart à l'orbite périodique modifie considérablement la trajectoire du rayon, cette dernière perd toute information relative à la condition initiale. L'orbite périodique est alors, dans ce cas, qualifiée d'**instable**.

En ce qui concerne le système mixte, l'orbite périodique est également stable.

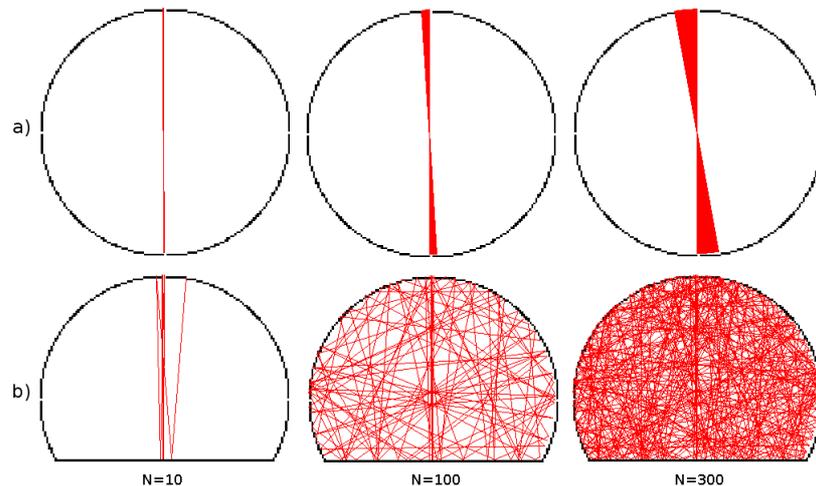


FIGURE 13 : Stabilité de l'orbite périodique à 2 rebonds (a) dans le cas d'un billard circulaire, (b) dans le cas du billard tronqué ( $w=1.5$ )

#### 3.3.2 Approche quantitative – Matrice de transfert totale

Si l'approche qualitative permet de bien comprendre le phénomène, il est cependant intéressant de quantifier les choses en caractérisant mathématiquement la divergence des rayons autour de l'orbite périodique à deux rebonds.

On note  $(s_0, p_0)$  le couple «abscisse curviligne-angle» définissant le premier point d'une trajectoire. En partant d'un point  $(s_0 + \delta s_0, p_0 + \delta p_0)$ , où  $\delta s_0$  et  $\delta p_0$  sont très petits devant  $s_0$  et  $p_0$ , nous pouvons écrire, après  $N$  rebonds, les variations  $(\delta s_N, \delta p_N)$  comme :

$$\begin{pmatrix} \delta s_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} = m_N \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta p_0 \end{pmatrix}$$

où  $m_N$  est une matrice de décomposition de la trajectoire en propagations et en réflexions, représentées par des matrices  $2 \times 2$ . Afin de déterminer cette matrice  $m_N$ , nous allons utiliser le formalisme de l'optique matricielle <sup>[3]</sup>. Ainsi, en suivant les conventions adoptées, une matrice de

propagation  $\mathbb{P}$  sur une distance  $d$  et une matrice de réflexion  $\mathbb{R}$  sur un contour de rayon de courbure  $R$  seront de la forme <sup>[3]</sup> :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \gamma} & -1 \end{pmatrix} \text{ où } \gamma \text{ est l'angle de réflexion.}$$

Dans le cas d'un billard tronqué, un rayon le long de l'orbite à deux rebonds, subit successivement : une propagation sur une distance  $wR$ , puis une réflexion en incidence normale (donc  $\gamma = 0$ ) sur la troncature (surface plane donc de rayon de courbure infini), de nouveau une propagation sur une distance  $wR$  et enfin une réflexion en incidence normale sur le contour circulaire de rayon de courbure  $R$ .

En chaînant ces quatre matrices, on obtient la matrice  $m_N$  appelée **matrice de transfert totale M**. Le calcul des valeurs propres de  $M$  permet de déterminer la stabilité de l'orbite.

Le chaînage des quatre matrices évoquées ci-dessus nous donne la matrice de transfert suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2wR \\ \frac{-2}{R} & -4w+1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors différentes valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  selon la valeur de  $w$ :

Si  $1 < w < 2$  (dynamique chaotique) :  $\lambda_{\pm} = (1-2w) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4w-2)^2 - 4}$

Ces valeurs propres sont **réelles**, l'orbite est **instable**.

Si  $0 < w < 1$  (dynamique mixte) :  $\lambda_{\pm} = (1-2w) \pm \frac{1}{2} i \sqrt{(4w-2)^2 - 4}$

Ces valeurs propres sont **complexes**, donc ne divergent pas : l'orbite est **stable**.

Si  $w=1$  :  $\lambda_{\pm} = \pm 1$

Ce sont des valeurs propres neutres qui caractérisent également des orbites stables. Notons que cette valeur de  $w$  correspond au billard demi-circulaire.

En adaptant la matrice de transfert au billard circulaire - où la réflexion plane est remplacée par une deuxième réflexion sur un contour sphérique - on obtient une valeur propre unique :  $\lambda_0 = 1$ , montrant ainsi la stabilité de l'orbite dans ce cas.

L'étude qualitative faite à partir des observations est donc bien en accord avec la théorie mathématique.

## **4. Etude approfondie du billard mixte**

Nous avons présenté différentes géométries pour le billard circulaire tronqué, et nous avons pu observer dans le cas du système mixte, à la fois des trajectoires régulières et chaotiques, et que les espaces des phases changent significativement avec la largeur de la troncature. Il est intéressant d'essayer d'isoler ces comportements et de comprendre de quelle manière ils coexistent dans un même système. Nous allons concentrer notre travail sur l'étude du billard mixte avec une troncature à  $w=0,9$ .

### **4.1 Résonances principales**

Dans ce système, le phénomène de résonance s'identifie par un contour fermé dans l'espace des phases. La figure 14 nous montre le comportement de deux trajectoires sur des résonances

principales, pour deux conditions initiales  $\alpha_0=22.5^\circ$  et  $\alpha_0=18^\circ$ . On remarque que la variation de l'angle initial donne une ouverture plus ou moins grande de la trajectoire dans le billard.

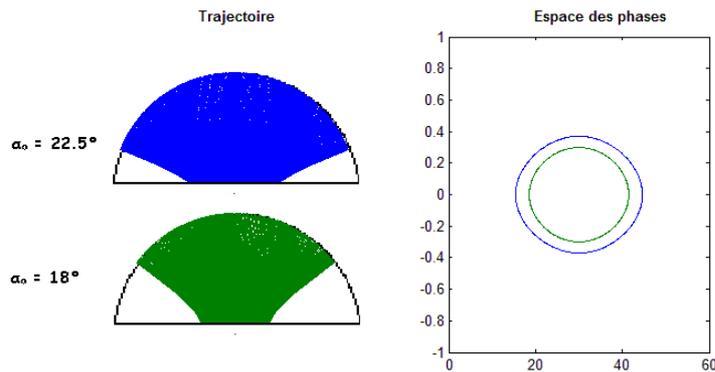


FIGURE 14 : Trajectoires et espace des phases d'un rayon sur deux différentes résonances principales

L'espace des phases correspondant à ces trajectoires donne deux courbes fermées de tailles différentes. On voit que la boucle bleue est plus grande que la verte, ce qui n'est pas surprenant car le rayon bleu possède des angles de réflexions plus grands et donc explore une plus grande partie du contour. Il est intéressant de remarquer que les deux boucles sont centrées autour d'un point qui correspond à l'abscisse curviligne  $s=30$  et un angle  $\gamma$  nul. Ce point représente l'orbite périodique à deux rebonds qui passe par le milieu du billard avec une réflexion normale au contour et dont nous avons montré la stabilité dans la partie 3.3. Le terme de résonance principale vient de leur positionnement au centre de l'espace des phases, en opposition aux résonances secondaires, décrites dans la partie 4.2.

On peut cependant essayer de comprendre comment se construit une résonance, en traçant la trajectoire d'un rayon envoyé sur une résonance pour différents nombres de rebonds  $N$ .

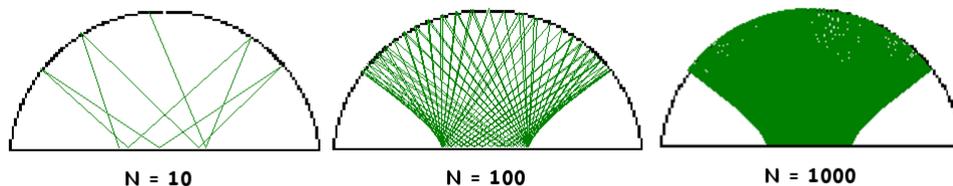


FIGURE 15 : Construction d'une résonance primaire pour différents nombres de rebonds  $N$

En observant cette trajectoire pour peu de rebonds ( $N=10$ ), on remarque qu'il se réfléchit avec des angles extrêmes et délimite ainsi une zone de l'espace, à l'intérieur de laquelle il va ensuite se propager. En augmentant le nombre de rebonds, on peut voir que le rayon ne sort pas de cette zone, mais au contraire reste confiné à l'intérieur. Il se propage en frappant le contour alternativement de droite à gauche et se décale légèrement pour combler tout l'espace, comme on peut voir pour  $N=1000$ . **Les résonances principales sont donc des trajectoires stables qui se construisent autour d'orbites périodiques stables.**

#### **4.2 Résonances secondaires**

Les résonances secondaires, contrairement aux résonances principales, se construisent sur des orbites périodiques plus complexes. L'espace des phases correspondant possède autant de boucles fermées que de réflexions sur le contour. On observe que ces boucles se forment autour de points fixes qui sont associés aux points de réflexion de l'orbite périodique sur le contour du billard. On voit clairement sur la figure 16 que le rayon suit une trajectoire régulière et n'explore asymptotiquement qu'une partie du billard.

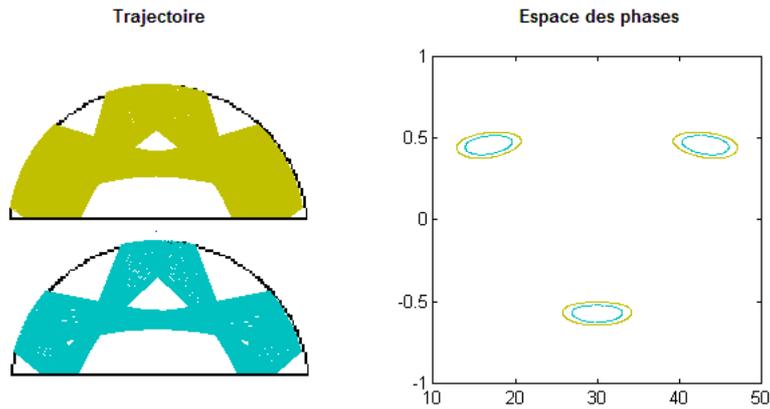


FIGURE 16 : Trajectoires et espace des phases d'un rayon sur deux différentes résonances secondaires

On peut vérifier, en faisant varier le nombre de rebonds, qu'une résonance secondaire se construit de façon identique à une résonance principale. En effet un rayon ayant un telle dynamique explore le contour de sa trajectoire sur les premières dizaines de rebonds, puis tend à explorer tout l'espace délimité, comme on peut le voir sur la figure 17.

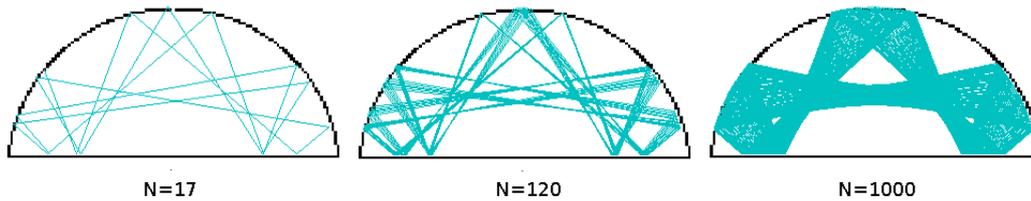


FIGURE 17 : Construction d'une résonance secondaire pour différents nombres de rebonds  $N$

### 4.3 Mer chaotique

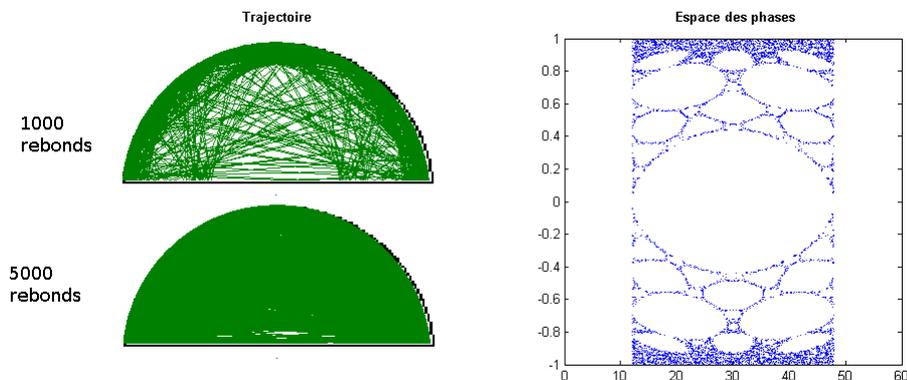


FIGURE 18 : Trajectoire irrégulière d'un rayon montrant l'aspect chaotique du billard mixte

Pour certaines conditions initiales on peut obtenir des trajectoires irrégulières dans le billard, qui ressemblent fortement à celles chaotiques que l'on peut rencontrer dans un billard où la troncature est à  $1 < w < 2$ . On retrouve une grande instabilité de la trajectoire et une dépendance accrue aux conditions initiales. Cependant le rayon ne semble pas explorer tout le billard, même au bout d'un grand nombre de rebond, contrairement à la dynamique chaotique vue dans la partie 3.2.2. L'espace des phases montre une répartition des points limitée dans l'espace et non uniforme. En effet on peut discerner des zones « interdites », dont on peut vérifier qu'elles correspondent à celles occupées par les résonances.

#### 4.4 Dynamique générale d'un système mixte

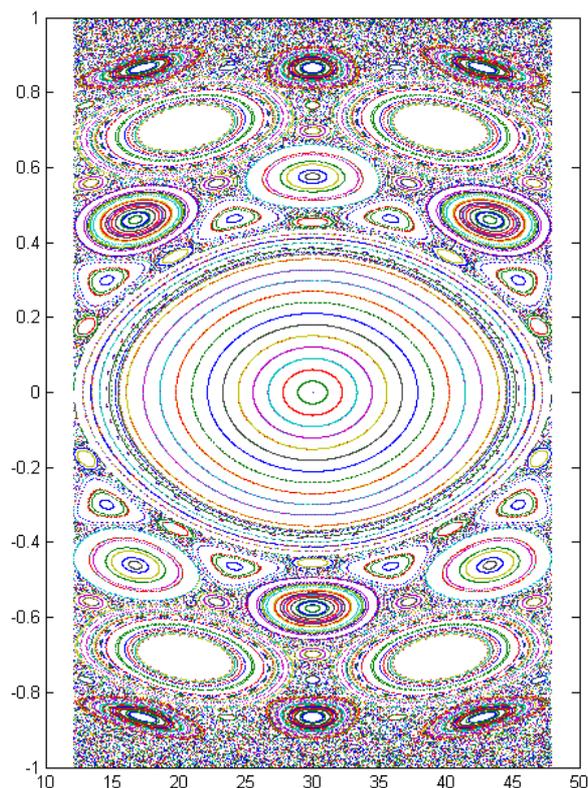


FIGURE 19 : *Espace des phases complet pour le cas du billard mixte*

Après avoir étudié les différentes dynamiques que l'on peut retrouver dans un billard mixte, on voudrait pouvoir déterminer la dynamique complète du système. On peut l'obtenir en envoyant un grand nombre de rayons avec des conditions initiales différentes de sorte à couvrir toutes les possibilités de réflexion et ainsi obtenir un espace des phases complet. Autrement dit, en plus de faire varier les angles, il est nécessaire d'envoyer les rayons à partir de différents points. Cela montre alors que le système **n'est pas ergodique**.

On distingue alors les résonances principales et secondaires ainsi que la mer chaotique. L'espace des phases est partagé entre ces différentes structures et on comprend alors le terme de mer chaotique du fait qu'elle remplit tout l'espace non occupé par les résonances. Les boucles qui composent les résonances secondaires peuvent alors être renommées îlots de résonance car ils sont contenus dans cette mer. On peut aussi voir qu'il existe une multitude de familles de résonances dont certaines - pour les plus grands angles en valeur absolue - sont plus isolées dans la mer, ce qui favorise leur perte de stabilité lors d'une variation de la troncature. On le vérifie facilement en regardant la figure 12 de la partie 3.2.3, exposant les différentes troncatures pour un billard mixte.

### 5. Conclusion

Au cours de cette étude nous avons non seulement pu mettre en exergue l'importance de la géométrie du billard sur la dynamique des rayons, qui peut être régulière, chaotique ou mixte, mais aussi comprendre comment cette dernière se construit.

Présentant une dynamique à la fois régulière et à la fois chaotique, le système mixte est donc très intéressant.

Des travaux ont montré que l'on retrouvait dans le comportement ondulatoire une signature de celui des rayons<sup>[6]</sup>.

La suite de notre projet consiste à observer ce lien entre le comportement des rayons et le comportement ondulatoire. Nous allons alors travailler sur un système réel qu'est la fibre optique. Il faut alors noter que si l'on projette la propagation de la lumière dans le plan transverse, celui-ci constitue un billard, nous ramenant ainsi à l'étude développée ici.

## **Remerciements:**

Nous tenons particulièrement à remercier notre encadrante Valérie Doya, pour nous avoir constamment soutenus pendant ce projet, et pour sa grande disponibilité tout au long de ces trois mois.

Nos remerciements vont aussi à Bernard Gay-Para et Eric Aristidi, pour leurs aides essentielles en informatique, ainsi qu'à Michèle Udé et Stanislaw Trzesien qui ont fabriqué notre fibre.

Enfin, nous remercions aussi tout le personnel du laboratoire pour son accueil.

## **Bibliographie :**

[1] : Valérie Doya, *Thèse de Doctorat : Du Speckle aux Scars, une expérience de chaos ondulatoire dans une fibre optique*, Nice, 2000.

[2] : Suhan Ree and L. E. Reichl, *Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut*, Physical Review E, Volume 60, Number 2, August 1999.

[3] : Claire Michel, *Thèse de Doctorat, Chaos Ondulatoire en Optique Guidée : Amplificateur fibré double-gaine pour la génération de modes « scar », chapitre 1:Regards Croisés*, Nice, 2009.

[4] : Paul-Antoine Hervieux, *Cours de systèmes dynamiques*, Université de Strasbourg (<http://www-ipcms.u-strasbg.fr/spip.php?article640&Lang=fr>).

[5] : Frédéric Faure, *Introduction au chaos quantique*, cours pour l'Ecole d'Eté de Physique Non-Linéaire de Peyresq, septembre 2007.

[6] : A. Bäcker, *Random waves and more : Eigenfunctions in chaotic and mixed systems*, The European Physical Journal, Special Topics, 2007.