

ÉMULER LA MÉCANIQUE QUANTIQUE AVEC DES MICRO-ONDES

RAPPORT DE STAGE
06 MAI 2010



Binôme : Julien DOMINSKI & Jad EL ITANI

Tuteur : Fabrice MORTESSAGNE

LICENCE DE PHYSIQUE
UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

Table des matières

Introduction	3
1 Puits de potentiel et cavité	4
1.1 L'équation de Shrödinger	4
1.1.1 Puits de potentiel infini 2D	4
1.2 Équations de Helmhöltz	4
1.2.1 Couplage électromagnétique	4
1.2.2 Onde TM et cavité conductrice	5
1.2.3 Quasi 2D	5
1.2.4 L'onde électromagnétique $\psi(x, y)$ dans le plan 2D	6
1.3 Analogie	6
1.4 Mesures des modes d'une cavité en Cuivre	6
1.5 Cartographie d'un mode	7
2 Couplage et résonance	8
2.1 Puits quantiques couplés	8
2.2 Deux diélectriques en résonance	9
2.3 Analogie	9
3 Symétries complexes	10
3.1 Rôle de la symétrie	10
3.2 Levée de dégénérescence dans un hexagone de diélectriques	11
Conclusion	12
Bibliographie	13
Table des figures	13
Table des tableaux	13

Présentation

Aujourd'hui, le caractère ondulatoire de la nature nous semble omniprésent : les vagues, le son, l'électricité, les atomes, les poutres, la lumière. À côté de cela, les sciences nous permettent de contenir ces vibrations dans les fibres optiques ou dans les guides d'ondes électromagnétiques ou encore de maîtriser les phénomènes de résonance, ne serait-ce que pour permettre aux voitures d'exister sans vibrer sous l'effet de leur propre moteur.

S'agissant d'ondes, il semble alors intéressant d'utiliser la mécanique de l'un pour comprendre l'autre, dans la mesure du possible. Ainsi, dans le cadre de notre projet il nous a été donné de découvrir des théories et méthodes permettant d'émuler certains problèmes de mécanique quantique avec des micro-ondes. Il devient possible avec des moyens simples en travaillant avec des micro-ondes sur des objets métalliques de l'ordre du décimètre d'émuler des problèmes touchant à l'atome dont la manipulation est bien plus délicate.

Nous commencerons donc par justifier dans un cas simple de puits de potentiel infini, la validité de cette analogie avec un champ électromagnétique dans une cavité, en expliquant les conditions indispensables pour pouvoir parler d'émulation. On peut voir que la fonction d'onde d'un électron piégé dans un puit de potentiel infini 2D est analogue à la résonance d'une onde électromagnétique au sein d'une cavité parfaitement conductrice. Nous indiquerons alors comment identifier les modes de résonance d'une cavité pour ensuite tracer la carte(nappe) d'un de ces modes.

Après quoi nous aborderons le sujet des systèmes à plusieurs niveaux aux symétries particulières qui aura été, pour nous, une initiation à la physique du solide avec des diélectriques. Car le diélectrique interagit avec l'onde électromagnétique comme le fait un puit de potentiel avec une fonction d'onde quantique.

Remerciements

Nous remercions l'équipe pédagogique de la Licence de Physique de Nice pour cette année riche d'enseignement. Nous tenions à remercier plus particulièrement M Mortessagne, notre tuteur sur ce projet, pour ses explications, sa patience et son enthousiasme à nous faire découvrir une partie de son domaine de recherche concernant les micro-ondes.

Chapitre 1

Puits de potentiel et cavité

1.1 L'équation de Schrödinger

Soit $\psi(\vec{r})$ la fonction d'onde indépendante du temps, l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule libre est

$$\left[\vec{\nabla}^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (1.1)$$

1.1.1 Puits de potentiel infini 2D

On rappelle la solution d'un puits de potentiel infini 1D de largeur a :

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (1.2)$$

Passons au problème d'un puits de potentiel infini 2D de base rectangulaire $L_x = a$, $L_y = b$ et de hauteur $L_z = \infty$. La fonction d'onde soumise à un potentiel infini vaut zéro, ce qui définit les conditions limites en $x \in \{0, a\}$ et $y \in \{0, b\}$. La solution est alors

$$\psi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (1.3)$$

Maintenant que nous avons une solution à ce problème de mécanique quantique, nous allons trouver l'analogie avec des micro-ondes dans une cavité parfaitement conductrice.

1.2 Équations de Helmholtz

1.2.1 Couplage électromagnétique

Une onde électromagnétique ψ est composée d'une partie électrique E et d'une partie magnétique H . La dépendance en temps de l'onde est telle que $\psi \propto \exp(-i\omega t)$.

Le couplage électromagnétique amène, à l'aide des équations de Maxwell, aux équations de Helmholtz.

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2 \right] \vec{E} = \vec{0} \quad (1.4)$$

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2 \right] \vec{H} = \vec{0} \quad (1.5)$$

1.2.2 Onde TM et cavité conductrice

L'onde électromagnétique située dans une cavité parfaitement conductrice respecte les conditions sur le contour :

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{0} \text{ et } \vec{B}_{\perp} = \vec{0} \quad (1.6)$$

La cavité est en 3D et nous cherchons une solution à un problème 2D. Nous allons donc sous certaines conditions le ramener à de la 2D. Pour cela, on prend une cavité parallélépipédique de dimension a , b et d suivant x , y et z . Notre première étape est d'annuler la dépendance en z de l'onde ψ en posant $d \ll \frac{\lambda}{2}$, nous donnons l'explication ci-après.

1.2.3 Quasi 2D

La résolution de l'équation de Helmholtz (1.4), avec les conditions aux bords, fournit les modes propres de la cavité. Toute onde qui ne respecte pas les conditions aux bords ne résonne pas. On a alors deux types de solutions : les modes Transverses Magnétiques(TM) tels que $B_z = 0$ et les modes Transverses Électriques(TE) tels que $E_z = 0$. Nous nous concentrons sur les modes TM($B_z = 0$) que nous utilisons par la suite. La notion de champs transverse indique que le champs vectoriel est défini dans le plan (x, y) , on indicera par un t minuscule toute composante transverse d'un champs dans le plan (x, y) . Par exemple, $\vec{E} = E_z \hat{z} + \vec{E}_t$.

Les conditions aux bords impliquent alors la nullité de \vec{E}_t en $z=0$ et $z=d$. D'après [Jackson] cela impose, dans le cas des ondes TM, les équations (un peu lourde mais que nous allons rapidement simplifier)

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (1.7)$$

$$\vec{E}_t \propto \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{\nabla}_t \psi(x, y) \quad (1.8)$$

$$\vec{H}_t \propto \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \psi(x, y) \quad (1.9)$$

Le nombre p permet de discrétiser les solutions et en prenant, $\lambda > 2d$, seul $p = 0$ est solution. *Dans nos expériences, nous utilisons des micro-ondes de fréquence comprise entre 1GHz et 8GHz, avec $\lambda_{1GHz} > \lambda_{8GHz} > \lambda_{10GHz} = 3cm$. Pour $d = 5mm$, on a bien la relation $\lambda > 2d$.* Les équations simplifiés deviennent

$$\vec{E} = \psi(x, y) \hat{z} \quad (E_t = 0) \quad (1.10)$$

$$\vec{H}_t \propto \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \psi(x, y) \quad (1.11)$$

On remarque que le champs \vec{E} est suivant \hat{z} , plus tard, nous mesurerons E_z pour connaître $|\psi(x, y)|^2$. Quant au champ \vec{H}_t , il est défini dans le plan 2D (x, y) .

Il nous faut maintenant trouver l'équation de l'onde électromagnétique $\psi(x, y)$.

1.2.4 L'onde électromagnétique $\psi(x, y)$ dans le plan 2D

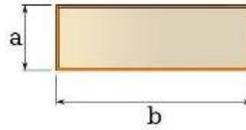


FIGURE 1.1 – Coupe transverse de la cavité

La condition aux limites des ondes TM, $\psi|_S = 0$, dans le plan (\hat{x}, \hat{y}) implique

$$\psi_{mn} = \psi_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1.12)$$

$$\omega_{mn}^2 = \pi c \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (1.13)$$

Où ω_{mn} est l'impulsion de l'onde 2D en résonance, elle ne dépend pas de z car on a montré $k_z = 0$.

1.3 Analogie

Les équations d'onde ψ 2D sont dans les deux cas solution d'une équation différentielle de la forme

$$\left[\vec{\nabla}^2 + \kappa \right] \psi = \vec{0} \quad (1.14)$$

La forme des problèmes imposait des conditions aux bords telles que

$$\psi|_S = 0 \quad (1.15)$$

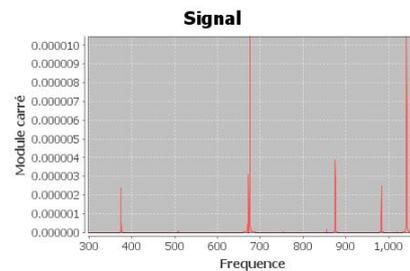
Au final la solution des deux problèmes est de la forme

$$\psi_{mn} = \psi_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1.16)$$

1.4 Mesures des modes d'une cavité en Cuivre



(a)



(b)

FIGURE 1.2 – (a) Cavité et analyseur (b) Partie du spectre

Nous avons utilisé trois couples d'antennes situées à l'intérieur de la cavité. Les antennes verticales rayonnent un champ dipolaire dans le plan de la cavité et excitent les modes TM. Nous obtenons alors un spectre d'émission 1.2(b) à partir duquel on identifie les pics de résonance.

Les fréquences de résonance sont $f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi}$, voir équation (1.13). Ainsi nous pouvons retrouver le mode TM_{mn} correspondant à une fréquence de résonance. Nous avons pu constater la concordance des modes théoriques et expérimentaux. Un extrait est donné dans le tableau 1.1 qui correspond au spectre de la figure 1.2 (b).

TABLE 1.1 – Modes $TM_{m,n}$.

Mode m n	F théorique	F expérience
1 1	378 MHz	376 ± 2 MHz
2 1	511 MHz	509 ± 2 MHz
1 2	674 MHz	672 ± 2 MHz
3 1	676 MHz	675 ± 2 MHz
2 2	756 MHz	754 ± 2 MHz

Nous avons développé un petit outil java graphique permettant de traiter les mesures des champs : affichage graphique et détection automatique des pics de fréquence. *Pour plus de détails, voir le site web du projet.*

1.5 Cartographie d'un mode

Nous avons ensuite sélectionné un mode isolé et effectué sa cartographie sur une zone de la cavité. Ne pouvant déplacer les antennes dans la cavité, nous avons utilisé une méthode perturbative indirecte. Elle consiste à déplacer une petite bille conductrice en différents points de la cavité puis à mesurer le décalage de la fréquence de résonance mesurée par l'antenne. Ce décalage en fréquence est directement proportionnel à l'intensité du champs à la position du perturbateur.

$$\Delta\nu \propto |E(\vec{r})|^2 \quad (1.17)$$

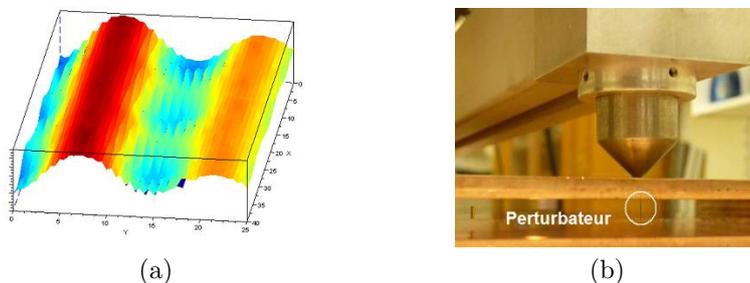


FIGURE 1.3 – (a) Carte d'un mode (b) Perturbateur

Chapitre 2

Couplage et résonance

2.1 Puits quantiques couplés

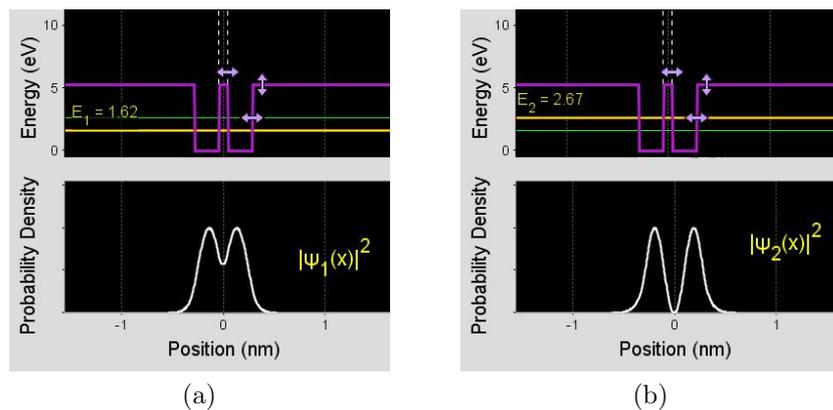


FIGURE 2.1 – Solutions (a)paire (b) impaire

Nous nous intéressons au couplage de deux puits de potentiels et à la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger correspondante. Pour étudier un tel système, nous utilisons l'application Wavebande du projet Phet de l'université du colorado. On peut voir, sur la figure 2.1, deux puits de potentiels couplés avec leurs niveaux d'énergie et les amplitudes de probabilité des fonctions d'onde correspondantes. Il y a une solution paire d'énergie E_1 (niveau fondamental) et une solution à la symétrie impaire de niveau d'énergie E_2 .

On sait, grâce à la mécanique quantique, que dans un tel système à deux niveaux un électron a la possibilité de se mettre dans un état lié avec une probabilité non nulle de se trouver pile entre les deux puits, figure 2.1(a). Pour sortir l'électron de cet état, il faut lui apporter de l'énergie sans quoi il reste tel quel et cela explique, en partie, la stabilité de molécules simples comme l'éthylène (voir [Le Bellac] pour plus de détails).

2.2 Deux diélectriques en résonance

Sur la figure 2.2(a), on a un système de deux diélectriques imposant chacun une permittivité ϵ locale dans le plan de l'onde TE. On utilise des antennes coudées qui excitent principalement les modes TE et un peu les TM que l'on néglige. Si l'on aligne l'axe de ces diélectriques avec l'antenne, on peut y étudier la géométrie de l'onde électromagnétique. En effet, comme pour la solution du problème à deux puits, il apparaît deux pics de fréquences très proches : un pour la solution paire et un autre pour la solution impaire. Ce qui est dû à un phénomène de résonance interne. En effectuant des mesures à différents points situés entre les deux diélectriques, on remarque que le pic lié à la solution assymétrique s'applatit à mesure que l'on rapproche l'antenne du milieu de l'axe séparant les deux diélectriques voir figure 2.2(b).

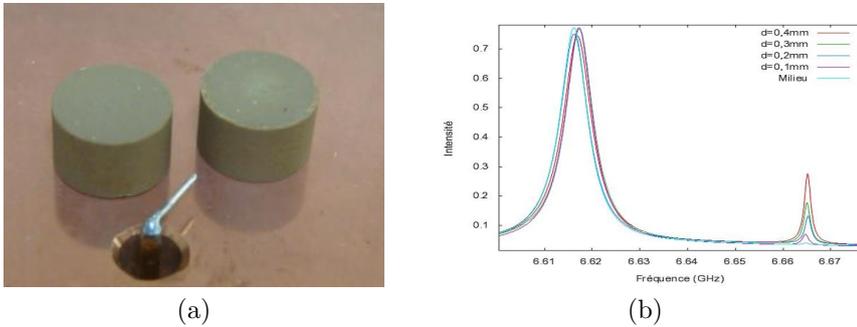


FIGURE 2.2 – (a)Diélectriques (b)Amortissement pic impair

2.3 Analogie

Ici, c'est la géométrie du système qui permet de faire une analogie entre la disposition des puits de potentiels et la disposition des diélectriques de permittivité ϵ . Pour comprendre cela on peut comparer l'équation de Schrödinger avec un potentiel qui varie en fonction de la position et l'équation de Helmholtz en présence de permittivité fonction de la position. Nous ne nous lançons pas dans une démonstration fastidieuse mais indiquons les deux équations en question et insistons sur la dépendance en position qui permet de comprendre l'importance de la similitude des géométries.

$$\left[-\vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.1)$$

$$\left[-\vec{\nabla}^2 + (1 - \epsilon(\vec{r})) k^2 \right] \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (2.2)$$

Dans l'analogie micro-ondes, les diélectriques vont, de part leur permittivité, jouer le rôle des puits de potentiels négatifs du problème quantique.

Chapitre 3

Symétries complexes

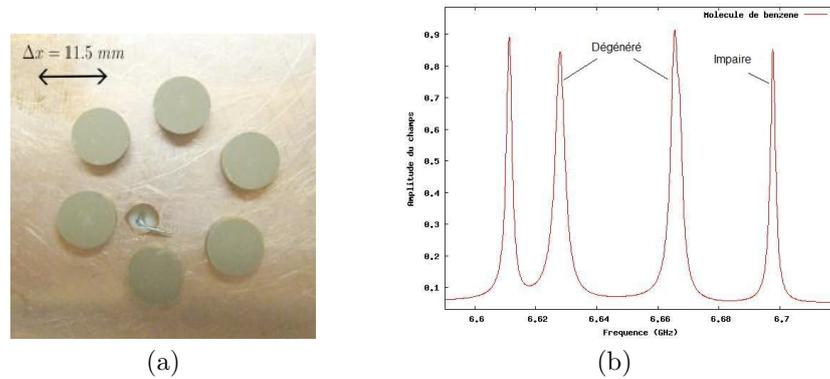


FIGURE 3.1 – (a)Diélectriques en hexagone (b)Pics de résonance

3.1 Rôle de la symétrie

En mécanique quantique, la géométrie des molécules joue un rôle important. Elle conditionne les fonctions d'ondes et leurs propres niveaux d'énergie. Par exemple, la molécule de Benzene composée d'une chaîne de six atomes de carbone a une géométrie hexagonale présentant une invariance par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Ce qui joue un rôle important lorsque l'on étudie ses niveaux d'énergie. Essayons par une image naïve de donner l'intuition de l'importance de cette symétrie. Numérotions par l'esprit les atomes de carbonnes de 1 à 6 et supposons que l'électron que l'on regarde se trouve autours du carbone 3.

- S'il se déplace d'une rotation d'angle $0 \times \frac{\pi}{3}$, il reste en 3.
- S'il se déplace d'une rotation d'angle $\pm 1 \times \frac{\pi}{3}$, il va en 2 ou 4.
- S'il se déplace d'une rotation d'angle $\pm 2 \times \frac{\pi}{3}$, il va en 1 ou 5.
- S'il se déplace d'une rotation d'angle $3 \times \frac{\pi}{3}$, il va en 6.

Maintenant, regardons les niveaux d'énergie et les fonctions d'ondes associées (tiré de [Le Bellac]).

- E_0 , un seul état $|\chi_0\rangle$.
- E_1 dégénéré, deux états $|\chi_1^+\rangle$ et $|\chi_1^-\rangle$.

- E_2 dégénéré, deux états $|\chi_2^+\rangle$ et $|\chi_2^-\rangle$.
- E_3 , un seul état $|\chi_3\rangle$.

Nous n'irons pas plus loin dans l'analyse mais espérons avoir intuité l'importance de la symétrie du benzène. Le lecteur intéressé pourra consulter [Le Bellac] chapitre sur les symétries p142.

3.2 Levée de dégénérescence dans un hexagone de diélectriques

Comme on le voit sur la figure 3.1(b), les pics de résonance du système de 6 diélectriques sont au nombre de 4. Il y a 6 ondes TM pour 4 fréquences. Les deux pics centraux sont dégénérés deux fois et celui tout à droite est le pic lié à la solution anti-symétrique. On remarque la similitude avec le Benzène.

Nous allons lever la dégénérescence du 3eme pic en brisant la symétrie du système. Pour cela on déplace un diélectrique de 1mm dans différentes directions et comparons l'importance de l'angle dans cette levée de dégénérescence. En regardant les résultats sur la figure 3.2(b), il semble qu'un déplacement orthogonal à l'axe de symétrie tracé sur la figure 3.2(a) lève plus efficacement la dégénérescence en même temps qu'il brise efficacement la symétrie.

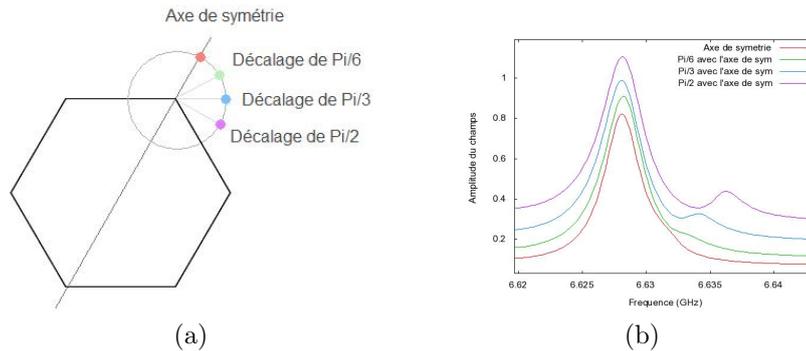


FIGURE 3.2 – (a)Déplacements (b)Levée de dégénérescence

Conclusion

Il apparaît donc que les ondes électromagnétiques présentent dans certaines conditions un comportement similaire à la fonction d'onde quantique. Manipuler les micro-ondes est plus simple et peut donc permettre une approche des problèmes quantique ne serait-ce que dans un but pédagogique même si l'intérêt ne s'arrête évidemment pas là.

Cette année riche en enseignement, nous aura permis d'étudier l'électrodynamique et la mécanique quantique. C'est donc avec continuité que nous avons entrepris d'apprendre à utiliser les micro-ondes pour toucher à la physique quantique.

À ceci s'est ajouté du traitement du signal, de la modélisation numérique et une approche expérimentale complexe et rigoureuse. En effet, le système expérimental nécessite une grande précision pour s'approcher de la physique parfaite du solide. Il nous a donc été nécessaire d'apprendre à manipuler un système de bras automatique piloté informatiquement.

Vous l'aurez compris, la compréhension de cette méthodologie et de la théorie s'est faite en passant par de nombreux protocoles expérimentaux et beaucoup d'application lors des manipulations. Je trouve donc au terme de ce stage que le sujet nous aura permis d'approcher la méthode scientifique qui ne se limite pas au contenu d'un livre mais consiste en une approche généraliste rigoureuse permettant la compréhension de phénomènes naturels.

Bibliographie

- [1] John David JACKSON, *Électrodynamique classique*, Dunod. Edition originale *Classical Electrodynamics 3rd edition*.
- [2] Michel LE BELLAC, *Physique quantique 2de édition*, EDP science.
- [3] David LAURENT, Thèse, *Chaos ondulatoire et diffusion multiple en cavité micro-ondes*, Juin 2007, LPMC.
- [4] Jérôme BARTHÉLEMY, Thèse, *Chaos ondulatoire en présence de pertes : modélisation et expérience de billards micro-ondes*, Septembre 2003, LPMC.
- [5] Logiciel Wavebande de l'université du Colorado <http://phet.colorado.edu>.

Table des figures

1.1	Coupe transverse de la cavité	6
1.2	(a) Cavité et analyseur (b) Partie du spectre	6
1.3	(a) Carte d'un mode (b) Perturbateur	7
2.1	Solutions (a) paire (b) impaire	8
2.2	(a) Diélectriques (b) Amortissement pic impair	9
3.1	(a) Diélectriques en hexagone (b) Pics de résonance	10
3.2	(a) Déplacements (b) Levée de dégénérescence	11

Liste des tableaux

1.1	Modes $TM_{m,n}$	7
-----	----------------------------	---