

# Dynamique d'un pendule

par M. AKOUALA Mesferdon & RARIJAONA Sedera

17 mai 2010

## Résumé

Dans ce rapport nous allons illustrer le stage effectué au laboratoire Dieudonné de durant le semestre 6, encadré par Mr. Médéric Argentina avec qui nous avons tenté une étude sur sans doute l'un des systèmes les plus simple mais aussi le plus complet que l'on puisse trouver dans le domaine de la physique "Le pendule" .

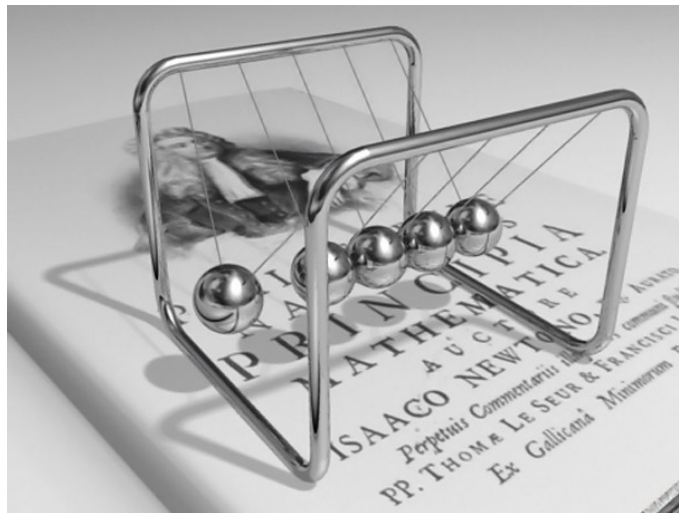


FIG. 1 – Pendule de Newton

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Description Théorique</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Les équations d'évolutions</b>	<b>4</b>
3.1	Cas d'un pendule tournant . . . . .	4
3.2	Cas d'un pendule tournant incliné . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Méthodes Numériques</b>	<b>6</b>
4.1	Algorithme de Runge Kutta . . . . .	6
4.2	Paramètres de simulation . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Etude de l'espace des phases</b>	<b>7</b>
5.1	Sections de Poincaré . . . . .	7
5.1.1	Définition . . . . .	7
5.2	Tracés de portraits de phases . . . . .	8
5.3	Comparaisons aux résultats théoriques . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

La dynamique d'un pendule étudie les forces et les mouvements du pendule.

On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur. Déplacé de sa position d'équilibre (stable) dans laquelle le centre de gravité est à la verticale de l'axe, le solide se met à osciller de part et d'autre de cette position dite d'équilibre. Un balancier d'horloge, une balançoire, etc, constituent des pendules pesants.

Le cas le plus simple est le pendule constitué d'un petit objet pesant accroché à un fil (ou une tige) de masse négligeable devant celle de l'objet. Un tel pendule est appelé pendule pesant simple.

Le pendule a depuis longtemps intéressé beaucoup de scientifiques, notamment Galilée, avec la loi de l'isochronisme qui stipule que la durée d'une oscillation ne dépend que de la longueur du pendule et non de l'amplitude du mouvement.

Puis on a aussi le pendule de Newton qui est un pendule particulier se composant de cinq billes et permettant d'illustrer les théories de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Enfin Foucault, qui mit en évidence la rotation de la Terre. En faisant osciller un pendule, il remarqua une déviation au sol du plan d'oscillation.

## 2 Description Théorique

Nous prendrons pour notre pendule les paramètres suivants longueur  $L=1\text{m}$ , la force  $g=9.8 \text{ S.I.}$ ,  $\theta$  angle de rotation du pendule autour de son axe,  $\dot{\theta}$  vitesse de rotation du pendule par rapport à l'axe  $z$ , et  $\dot{\phi}$  vitesse de rotation du système autour de l'axe  $z$  et  $\alpha$  l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la gravité (ou angle d'inclinaison de la gravité par rapport au pendule). Après avoir déterminé les formes analytiques de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique nous calculerons le Lagrangien de notre système grâce à la formule  $L=E_c-E_p$  puis déterminerons les équations du mouvement de notre pendule, en appliquant la formule d'Euler-Lagrange :

$$\frac{dL}{dr} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{dr} \quad (1)$$

## 3 Les équations d'évolutions

### 3.1 Cas d'un pendule tournant

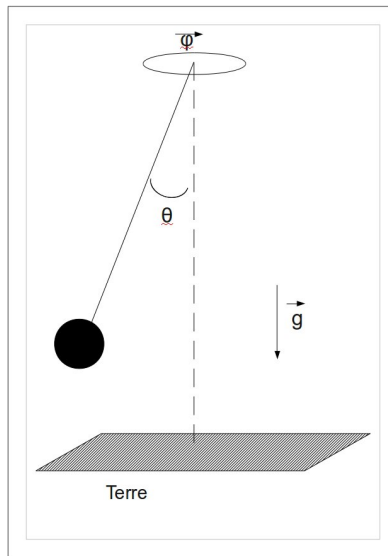


FIG. 2 – Pendule tournant

Le pendule a pour coordonnées :

$$x = l \sin \theta \cos \phi \quad (2)$$

$$y = l \sin \theta \sin \phi \quad (3)$$

$$z = l \cos \theta \quad (4)$$

Après avoir déterminé nos  $E_c$  et  $E_p$  on peut écrire les équations du mouvement pour  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{\phi}$  en utilisant le formalisme Lagrangien :

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} \quad (5)$$

$$\frac{dL}{d\phi} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\phi}} \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{l} \sin\theta \quad (7)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta} \quad (8)$$

Le pendule simple nous a servi de base pour étudié le cas qui nous intéresse le pendule tournant incliné.

### 3.2 Cas d'un pendule tournant incliné

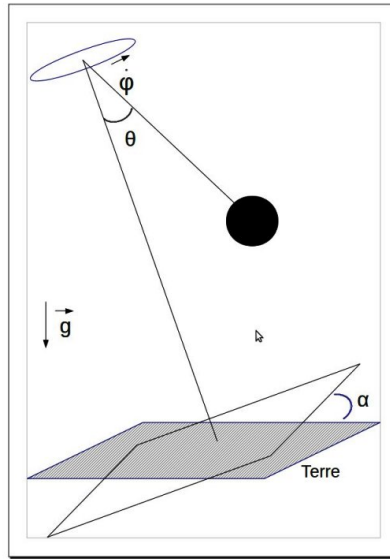


FIG. 3 – Pendule tournant incliné

Ici nous avons une déviation d'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe des y. Plutôt que de considérer que c'est tout le système qui a tourné nous allons dire que seule la gravité a été déviée de  $\alpha$ . Cela revient au même et il est plus simple de déterminer les équations du mouvement ainsi. Comme dans le cas précédent on peut écrire les équations du mouvement pour  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{\phi}$  en utilisant le formalisme Lagrangien :

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{l} \sin\theta \sin\alpha \quad (9)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta} \quad (10)$$

l'équation 10 ne change pas que le pendule soit incliné ou non .

## 4 Méthodes Numériques

On va utiliser ici le langage informatique C pour résoudre les différentes équations différentielles. La méthode de résolution de Runge Kutta sera utilisée pour résoudre les différentes équations différentielles énumérées plus haut.

### 4.1 Algorithme de Runge Kutta

On utilise ici, la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4, dénoté RK4.

La méthode RK4 est donnée par l'équation :

$$- y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$$- k_1 = y(x_n, f_n)$$

$$- k_2 = y(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$- k_3 = y(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$- k_4 = y(x_n + h, y_n + hk_3)$$

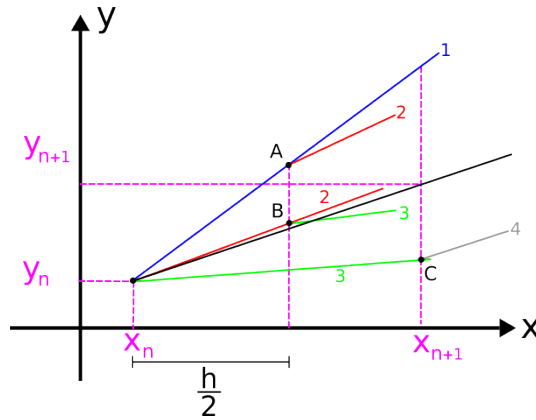


FIG. 4 – Illustration graphique du Runge Kutta 4

Nous nous servons de notre programme afin de simuler les différents portraits de phase de notre pendule. Ainsi pour notre pendule incliné lorsque l'on pose  $\phi = \alpha = 0$  on remet le pendule dans le cas d'un pendule tournant simple.

### 4.2 Paramètres de simulation

-Déclaration des diverses constantes utilisées par la suite :

g : constante de pesanteur

l : longueur du pendule

$\alpha$  : angle d'inclinaison du système

-On initialise les différentes valeurs de  $\theta$  et  $\phi$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$ .

-On fixe les paramètres dont principalement  $\dot{\phi}$  et l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$ . En effet lorsque l'on se choisit un angle  $\theta$  au temps  $t=0$  (entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ), cela donne à notre système une valeur d'énergie minimale ( $E_p$ ). Et à cette énergie viendra s'ajouter celle acquise par le pendule du fait de la rotation du système

autour de l'axe z, par la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ . De ce fait notre choix d'énergie mécanique ne doit pas être inférieure au minimal de l'énergie du système qui aura été déterminé par les paramètres cités précédemment. Cela entraînerait un bug de la simulation (selon le type de machine utilisé).

## 5 Etude de l'espace des phases

L'état mécanique d'un oscillateur à un instant donné est complètement déterminé par la connaissance de sa position et de sa vitesse, elles mêmes calculables à l'aide de l'équation différentielle du mouvement et des conditions initiales. Cet état mécanique peut être représenté sur un graphe (vitesse, position), appelé "portrait de phase".

### 5.1 Sections de Poincaré

#### 5.1.1 Définition

Pour définir cette section de Poincaré dans le cadre du problème qui nous concerne, on est ici dans un espace avec quatre paramètres variables qui sont  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\phi$  et  $\dot{\phi}$  et on ne peut pas représenter un espace à quatre dimensions. Il est alors intéressant de reporter sur un diagramme les valeurs  $(\theta, \dot{\theta})$  de notre masse à chaque fois que celle-ci coupe l'axe  $\phi$  en  $\sin\phi$  (modulo  $2\pi$ ) s'annule et on ne garde que les valeurs  $\theta, \dot{\theta}$  correspondant à ce moment précis. Ce qui nous ramène à 2 dimensions notre pendule. Cela nous permettra de faire des portraits de phase du pendule donc de pouvoir étudier son état.

## 5.2 Tracés de portraits de phases

### 1/Pendule simple

Ici on a choisi une vitesse  $\dot{\phi}$  et un angle  $\alpha$  tous deux nuls.

La lecture des coordonnées de notre pendule M de l'espace des phases donne directement la vitesse et la position du mobile.

La trajectoire décrite par M donne l'évolution du système au cours du temps. On peut reconnaître quelques caractères généraux : - lorsque l'oscillateur est amorti, la trajectoire converge inexorablement vers un point, de l'axe des abscisses (position d'équilibre) ; - lorsque l'oscillateur est entretenu, la trajectoire converge vers une trajectoire limite, correspondant à un régime permanent (cycle limite) ;

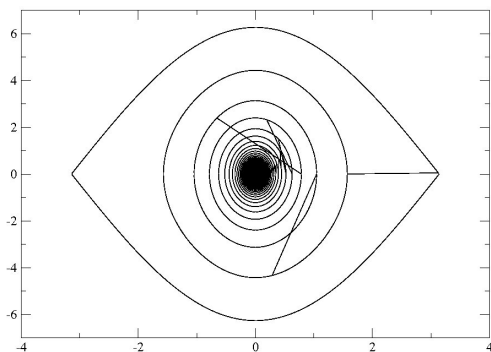


FIG. 5 – Portrait de phase d'un pendule simple obtenu à partir d'un pendule tournant

### 2/Pendule tournant avec une inclinaison :Petites oscillations

-Cas extrêmes La figure de gauche représente le portrait de phase de notre pendule avec les paramètres de départ suivants :  $\alpha = \pi/2$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\dot{\phi} = 0.5$ , et  $E_m = 25$ . On voit clairement que ce système n'a pas de trajectoire limite car il y a une croissance linéaire de la vitesse et de l'angle  $\theta$ . Ce système est instable.

Le graphique de droite lui nous montre le portrait de phase du même système que précédemment sauf qu'ici nous avons une énergie  $E_m = 1.4$ . On voit ici que avec une telle valeur d'énergie le pendule est incapable de ne faire qu'un seul tour complet.

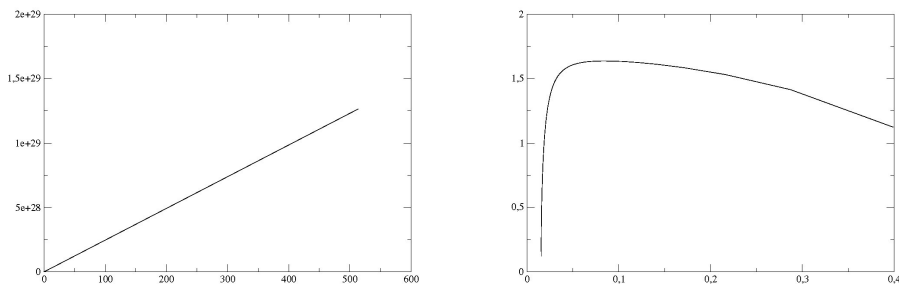


FIG. 6 – Portraits de phase à vitesse élevés et à vitesse quasi-nulle

Lorsque l'on fixe  $\theta$ ,  $\dot{\phi}$  et  $E_m$  le seul paramètre qui puisse varier restant est  $\dot{\theta}$ . Ainsi pour observer des oscillations il faut veiller à ce que pour ce système la valeur d'énergie mécanique (donc de  $\dot{\theta}$ ) soit suffisamment



grande comme mais pas trop sinon on obtient un système instable.

-Cas simples

On fixe ici une vitesse de rotation  $\dot{\phi} = \frac{g}{l}$ . Cela equivaut à la pulsation  $\omega$  de notre pendule. A différentes énergies on obtient le portrait de phase suivant : On observe sur ce portrait de phase on voit que la trajectoire converge

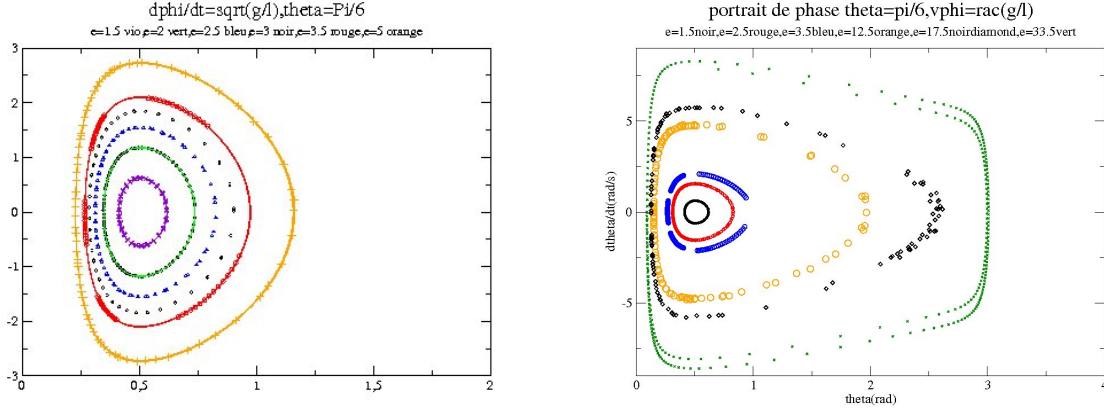


FIG. 7 – Portrait de phase d’un pendule tournant avec un angle  $\theta = \frac{\pi}{6}$   $\dot{\phi} = \frac{g}{l}$ , à gauche, on a,  $E_m = 1.5$  violet, 2 vert, 2.5 bleu, 3 noir, 3.5 rouge, 5 orange et à droite, on a  $E_m = 1.5$  noir, 2.5 rouge, 3.5 bleu, 12.5 orange, 17.5 noir, 33.5 vert

à chaque fois vers un point et plus on augmente notre énergie et plus le point en question est très prononcé et éloigné du centre de notre portrait. Mais à une certaine valeur d’énergie on a un portrait à trajectoire limite sans point de convergence( cf. site internet). Le point de convergence que l’on observe est une solution homocline de nos équations en effet à un temps  $t$  tendant vers plus l’infini ou moins l’infini le portrait convergera vers ce point.

### 2.1/Grandes oscillations

Nous avons observer les mêmes comportements que pour les petites oscillations à la différence que l’énergie à fournir est plus élevée. Les portraits de phases obtenues seront consultables sur le site internet.

## 5.3 Comparaisons aux résultats théoriques

Après avoir obtenu les différents résultats cités précédemment nous vérifions ceux ci à l’aide de la formulation théorique.

Nous avons fait un programme nous permettant d’observer les portraits de phases théoriques à partir de la formule :

$$J = l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 d'o \dot{\phi}^2 = \frac{J}{l^2 \sin^2 \theta} \quad (11)$$

Ensuite, on remplace  $\dot{\phi}$  dans l’équation (9) cela nous donne :

$$\ddot{\theta} = \frac{J}{L^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta \quad (12)$$

En multipliant l’équation obtenue par  $\dot{\theta}$  puis en l’intégrant nous obtenons notre équation de  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$

$$\dot{\theta} = \sqrt{(2 \cos \theta \frac{g}{l} - \frac{J^2}{l^2 \sin^2 \theta} + E_m)} \quad (13)$$

Grâce a cette fonction nous dessinons le portrait de phase théorique suivant :

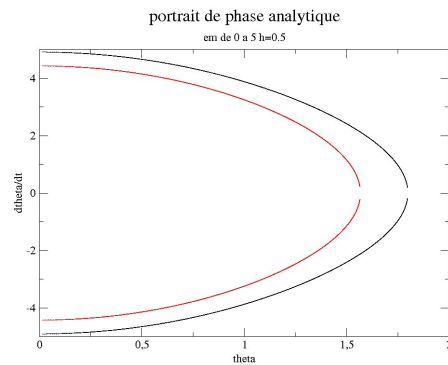


FIG. 8 – Portrait de phase d'un pendule simple obtenu à partir d'un pendule tournant

Nous remarquons que cette forme est similaire a celles obtenues précédemment dans notre étude des portraits de phases.

## 6 Conclusion

Durant ce stage, nous avons pu explorer différents aspects du mouvement d'un pendule. Allant d'un pendule simple, puis tournant et enfin incliné. Nous avons pu explorer largement l'utilisation du Lagrangien pour résoudre les équations.

Une grande partie résolution numérique a aussi été étudié, mais notamment le cas d'un pendule chaotique que l'on a pas pu simuler correctement faute de temps.

Nous avons pu aussi tracer différents portraits de phases du pendule mis dans une condition initiale particulière.

## 7 Bibliographie

L'encyclopédie en ligne wikipedia

<http://www.phy.davidson.edu/StuHome/chgreene/Chaos/Pendulum/pendulumcontentframe.htm>

<http://vivienmallet.net/chaos/outils.php>