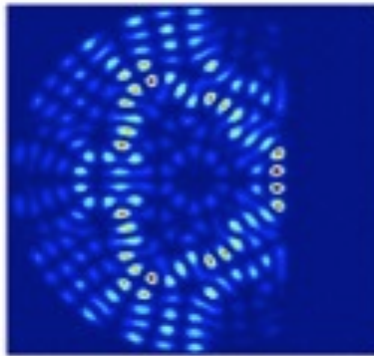


Licence de Physique
Rapport de stage en Laboratoire

Chaos Cicatrisé



CONTANT Romain

HANNA Georges

Encadrantes : Doya Valérie

Michel Claire

Sommaire

<u>1 Introduction</u>	3
<u>2 Étude préliminaire de OP3</u>	
2.1 Première approche de l' OP3	4
2.2 L'orbite triangle	5
2.3 Angles et longueurs caractéristiques de l' OP3	6
<u>3 Étude de la stabilité de l' OP3</u>	
3.1 Matrice de transfert	7
3.2 Valeurs caractéristiques de l' instabilité	8
3.3 Points auto-focaux	8
<u>4 Conclusions</u>	10
<u>Remerciements</u>	10
<u>Bibliographie</u>	10

1) Introduction

Ce rapport rédigé dans le cadre des stages en laboratoire organisés en licence de physique s'intègre dans les nombreuses problématiques qu'offre la théorie du chaos.

En 1961 E.Lorenz découvre suite à des calculs météorologiques ce qu'on nomme aujourd'hui la théorie du chaos. Ces prévisions nécessitent un nombre important de calculs. En effet, les phénomènes météorologiques suivent les lois de la dynamique, thermodynamique etc... Ils peuvent être décrits par des ensembles d'équations différentielles complexes du fait du nombre importants de phénomènes et variables en jeu. Le résultat de ces équations météorologiques traité numériquement, Lorenz décida, afin de s'assurer des données obtenues, de relancer le calcul informatique fait pour ces mêmes équations. Cependant, par soucis de temps, seulement trois décimales contre six furent utilisées pour le deuxième calcul. Il pensait qu'une faible variation dans les variables à la base d'un calcul aussi complexe aurait une incidence du même ordre de grandeur sur le résultat final.

Seulement il obtint des résultats totalement différents. Il mit ainsi en évidence la propriété qui caractérise le chaos: *l'extrême sensibilité aux conditions initiales*. Aujourd'hui la théorie du chaos regroupe l'étude de problématiques plus larges que la seule étude de la météorologie, et aborde des sujets tels que l'évolution de populations voire même des problématiques relatives à l'informatique et l'économie.

On dit dès lors d'un système dynamique qu'il est chaotique s'il possède sur des temps très longs, *un comportement assimilable au hasard et une très forte sensibilité aux conditions initiales*. Il existe des systèmes simples gouvernés par des lois simples, mais où un très petit écart à une condition initiale donnée implique une évolution très différente de la première. Le système est alors «chaotique» car une erreur minime de mesure ou un arrondi conduit à des résultats bien différents au bout d'un temps suffisamment long, c'est donc, le chaos déterministe.

Un exemple de système est celui d'un système fermé à deux dimensions dans lequel on suit la trajectoire d'un rayon se réfléchissant sur les contours par réflexion. Ce système dynamique à géométrie fixée est nommé *billard*. En effet si l'on remplace les rayons par des boules de billard et les parois réfléchissantes par les bandes, l'analogie est frappante. Seulement, le choix de la géométrie du billard est important dans la dynamique des boules, on se convaincra aisément que la stratégie du joueur change si la géométrie passe de rectangulaire à circulaire, il apparaît alors que la dynamique de la trajectoire *est conditionnée par la géométrie* du billard.

On s'intéressera donc dans le cadre de notre projet à *un billard dit optique*, dans lequel on étudiera les trajectoires des rayons lumineux. Les bords du billard seront alors assimilés à des parois réfléchissantes et les objets dynamiques seront des rayons lumineux se propageant dans le billard optique. Le billard optique est associé à la section transverse d'une fibre optique; seulement la géométrie du problème ne sera pas simplement celle d'une fibre optique circulaire classique, on cherche en effet à obtenir une dynamique chaotique. Pour cela on étudiera le cas d'un billard circulaire possédant une troncature droite à mi-rayon

On sait que la dynamique classique est une approximation de la physique ondulatoire valable si les dimensions du système sont grandes devant la longueur d'onde. On se demandera alors quelle est l'influence de la géométrie chaotique lorsque l'on passe des rayons aux ondes.

Des études ont montré que certains modes de propagations de systèmes chaotiques présentent des localisations d'intensité sur des trajectoires particulières. L'objectif du stage est d'étudier une variété de ces modes exotiques. En amont, il est indispensable d'étudier les trajectoires classiques le long desquelles ces modes se construisent. Ces trajectoires se rebouclent sur elles mêmes au bout d'un nombre fini de réflexions, ce sont les orbites périodiques. Le rapport traitera plus spécifiquement de l'orbite périodique à 3 rebonds que l'on appellera OP3 et qui possède dès lors un aspect triangulaire.

On cherchera dans ce rapport à caractériser la géométrie du système étudié. Pour ce faire, il est nécessaire de faire une étude préliminaire sur cette orbite en donnant ses caractéristiques géométriques: angles et longueurs caractéristiques. Le caractère chaotique de la dynamique des rayons dans un billard est lié à la stabilité de ses orbites périodiques. Suite à cela il apparait essentiel d'aborder la problématique de la stabilité de l'OP3. Cette étude passe par la caractérisation de la matrice de transfert pour obtenir des informations quantitatives sur la stabilité du problème. Ceci afin d'aboutir à une caractérisation plus fine de l'OP3.

2)Etude préliminaire sur l' orbite triangulaire

Cette première partie à pour objectif de définir, décrire et caractériser la géométrie particulière de l' OP3. Après un bref résumé du système étudié, on amorcera l' étude de l' OP3 de par les conditions imposée de par sa géométrie. Ensuite nous caractériserons analytiquement puis numériquement l' orbite étudiée.

2.1)Première approche de l' OP3

On sait déjà que le billard est un système fermé à 2 dimensions, répondant à des lois déterministes. C'est à dire que l'évolution d'un rayon est décrite par une succession de trajectoires rectilignes et de réflexions répondant aux lois de Snell-Descartes, dès lors, la connaissance du point d' impact de la trajectoire sur le contour du billard, ainsi que l' angle de réflexion déterminent parfaitement l'angle de réflexion suivant. La dynamique de la trajectoire se ramène alors à l' *évolution d' une séquence de réflexions*.

La trajectoire suivie par le rayon peut être représentée dans un espace appelé *espace des phases*.

Ce dernier peut être réduit à sa section de Poincaré, dont la représentation la plus courante se fait dans les variables $(s, \sin(\theta))$ où s est l' abscisse curviligne et θ l' angle de réflexion par rapport à la dynamique des rayons.

La dynamique des rayons dans les billards chaotiques est très différente de celle des billards réguliers. La dynamique régulière est illustrée dans la figure 2.1.a montrant une trajectoire typique dans le billard en forme de cercle tronqué et sa section de Poincaré tandis que dans la figure 2.1.b on observe la dynamique dans une fibre optique tronquée.

Pour un très grand nombre de réflexion dans la fibre optique tronquée , l' espace des phases associés est entièrement et uniformément rempli.

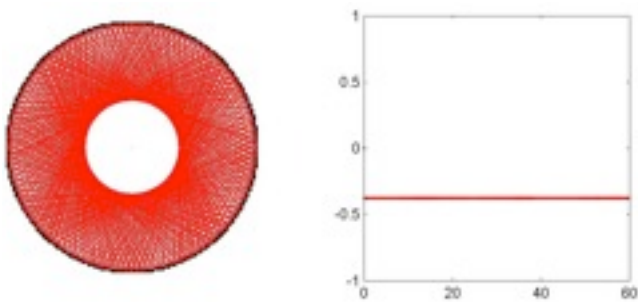


fig 2.1.a : Dynamique et espace des phase pour un billard circulaire

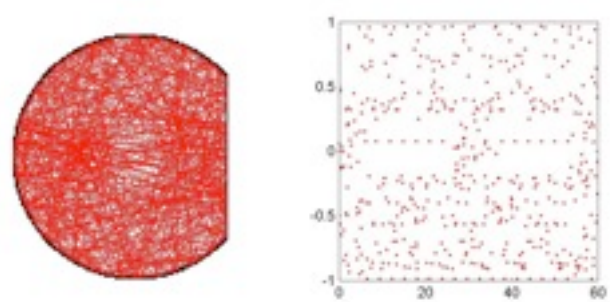
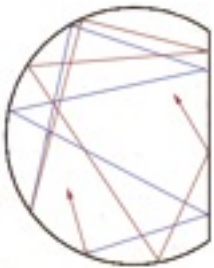


fig 2.1.b : Dynamique et espace des phase pour un billard tronqué

Comme on l'a mentionné précédemment la dynamique est chaotique. Bien qu'à ce niveau de l'étude, aucun résultat quantitatif n'ait été présenté, une approche qualitative reste un bon moyen de se persuader de la sensibilité aux conditions initiales que cette géométrie impose :



Ici, on observe pour deux conditions initiales très proches, une nette séparation des rayons qui augmente de façon exponentielle après seulement quelques réflexions.

Bleu : Première condition initiale
Rouge : Seconde condition initiale

fig 2.2 : Dynamique de rayon illustrant la sensibilité aux conditions initiales

Afin de caractériser cette dynamique il est essentiel d'aborder plus en profondeur la notion d'orbite périodique. Une orbite périodique est une trajectoire de rayons qui se re-parcourt au bout d'un nombre fini de réflexions. Dans le billard considéré, il existe un nombre infini d'orbites, chaque orbite est nommée selon le nombre de réflexions nécessaires pour revenir à la condition initiale. Une orbite périodique se nommera alors pour n réflexions : OP_n :

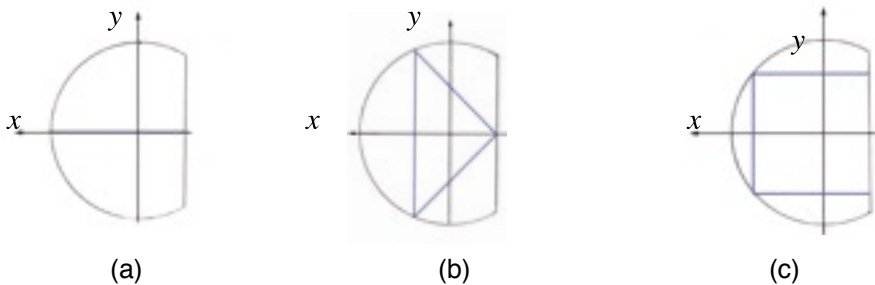


fig 2.3 :
(a) orbite OP_2
(b) orbite OP_3
(c) orbite OP_6

2.2) L'orbite triangle

Comme son nom l'indique, l' OP_3 est une orbite qui se re-boucle après 3 réflexions. Cette condition impose une forme et donc des paramètres bien précis :

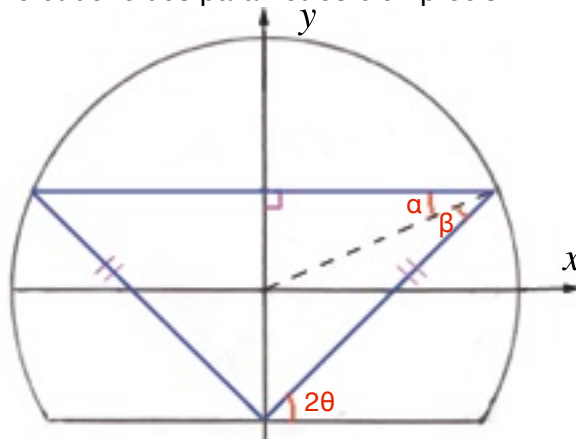


fig 2.4 : Représentation schématique des conditions de l' OP_3

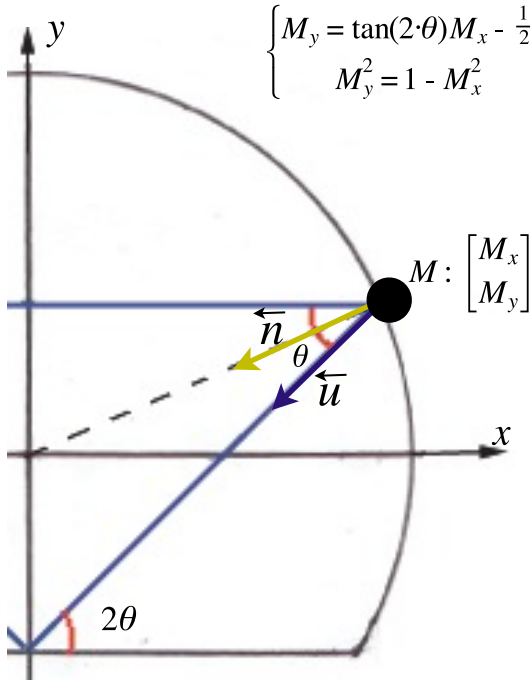
Seul un triangle isocèle permet de re-boucler la trajectoire. Cette condition est imposée par la symétrie suivant l'axe des abscisses. L'unique manière de construire ce triangle isocèle est de faire passer les rayons par le centre de la troncature. En effet, si cette condition n'est pas remplie, les segments diagonaux ne seraient pas égaux et la trajectoire ne pourrait pas être périodique.

A cela, il faut rajouter qu'il existe un segment parallèle à la troncature.

Or les lois de Snell-Descartes imposent que l'angle réfléchi soit égal à l'angle incident, soit : $\alpha + \beta = 2\theta$
D'où : $\alpha = \beta = \theta$

2.3) Angles et longueurs caractéristiques de l' OP_3

Dés lors qu'on impose ces contraintes sur les angles, il apparait 2 points de chaque part des abscisses sur le triangle. Ces deux points *appartiennent au cercle* centré à l'origine et de rayon R et de plus ils *appartiennent à l'une ou l'autre des trajectoires diagonales* de l'OP3. Afin de déterminer les coordonnées de ce points, on se focalisera sur le point M des abscisses positives et on cherchera à déterminer ses coordonnées pour un rayon unité :



$$\begin{cases} M_y = \tan(2\theta)M_x - \frac{1}{2} & (1) \\ M_y^2 = 1 - M_x^2 & (2) \end{cases}$$

Car M appartient à la trajectoire diagonale et M appartient au cercle

$$M_y^2 = \tan^2(2\theta)M_x^2 - \tan(2\theta) \cdot M_x + \frac{1}{4}$$

On injecte ce résultat dans l'équation (2)

$$(\tan^2(2\theta) + 1)M_x^2 - \tan(2\theta) \cdot M_x - \frac{3}{4} = 0$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 soit :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \tan^2(2\theta) + \frac{3}{\cos^2(2\theta)}$$

Les solutions sont alors de la forme :

$$M_x = \frac{1}{2} \cos(2\theta) (\sin(2\theta) \pm \sqrt{3 + \sin^2(2\theta)})$$

On ré-injecte ce résultat dans l'équation (1) :

$$M_y = \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\sin(2\theta) \pm \sqrt{3 + \sin^2(2\theta)}) - \frac{1}{2}$$

Avec les coordonnées du point M on peut définir les vecteurs \vec{u} et \vec{n}

Ainsi la première condition trouvée sur l'angle θ impose le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \cos(\theta)$$

$$\vec{u} = -\cos(2\theta) \hat{x} - \sin(2\theta) \hat{y}$$

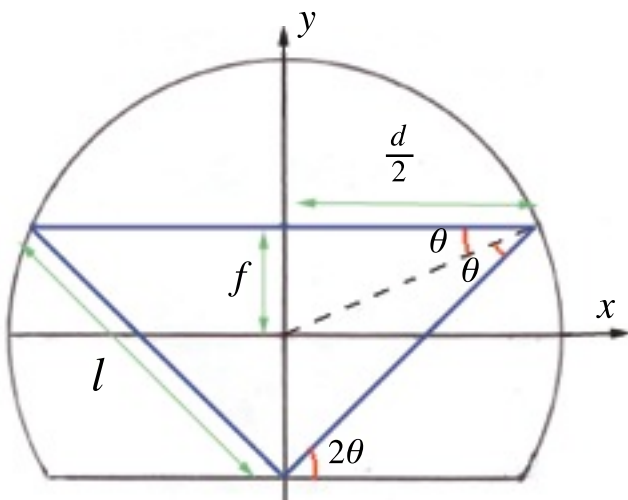
$$\vec{n} = -M_x \hat{x} - M_y \hat{y}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} (\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)) (\sin(2\theta) + \sqrt{3 + \sin^2(2\theta)}) - \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \sqrt{3 + \sin^2(2\theta)} = \cos(\theta)$$

D'où la valeur numérique : $\theta = \pm 21,47^\circ$ ou $\pm 0,37$ rad

L'angle θ fixé, toutes les autres longueurs apparaissent comme de simples relations trigonométriques, ainsi on peut écrire pour un rayon quelconque :



$$f = R \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{2} = R \cdot \cos(\theta)$$

$$l = R \cdot \sqrt{\sin(\theta) + \frac{5}{4}}$$

$$L = 2 \cdot R \cdot \left(\cos\left(\theta + \sqrt{\frac{5}{4} + \sin(\theta)}\right) \right)$$

(où L est le périmètre du triangle)

fig 2.6 : Caractérisation de l'OP3

Finalement, on obtient les valeurs numériques suivantes pour un rayon unité :

$$\frac{d}{2} = 0,931$$

$$L = 4,403$$

$$l = 1,271$$

Ainsi, on peut à l' aide de ces données étudier plus en détail la dynamique autour de l'OP3.

3) Etude de la stabilité de l'orbite périodique

Dans cette partie on s'intéressera à caractériser la stabilité autour de l' orbite périodique triangle.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion de matrice de transfert ;

On cherche à déterminer l' évolution d'un rayon lorsqu'il est proche de la trajectoire de l' orbite périodique triangle. Puisque le système est homogène par morceau, la trajectoire de tout rayon lumineux est un enchaînement de propagations en ligne droite et de réflexions sur les bords du billard représenté par la section transverse de la fibre optique. Des opérateurs de propagation et de réflexion permettent d' obtenir une relation matricielle décrivant l' évolution d' un rayon lumineux en fonction des conditions initiales. Cette matrice est appelée matrice de transfert. On étudiera la matrice de transfert décrivant une période de l' OP3 et on en déduira les coefficients relatifs à la stabilité de l' orbite. Finalement on définira et on trouvera les points auto-focaux associés .

3.1) Matrice de transfert

On note (s_0, p_0) le couple «abscisse curviligne-angle» servant a repérer la condition initiale dans l' espace des phases. En partant d'un point écarté d' une distance $(s_0 + \delta s_0, p_0 + \delta p_0)$, où δs_0 et δp_0 sont petits devant s_0 et p_0 , on peut écrire, qu'après N réflexions, les variations $(\delta s_N, \delta p_N)$ évoluent comme :

$$\begin{pmatrix} \delta s_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} = M_N \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta p_0 \end{pmatrix}$$

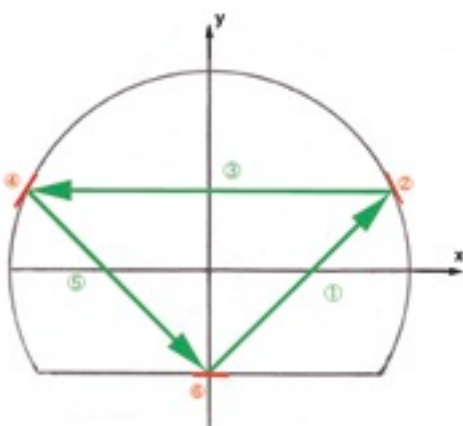
où M_N est la matrices de transfert après N réflexions sur les bords du billard. On assimilera les bords de la fibre optique à des miroirs réfléchissants, faisant de celle-ci une cavité optique.

Afin d'avoir la matrice de transfert, le formalisme de l' optique matricielle donne les matrices de réflexions notée R et de propagation notée P .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos(\gamma)} & -1 \end{bmatrix}$$

d est la distance parcourue
 R est le rayon de courbure
 γ est l' angle d' incidence par rapport à la normal du contour

On cherchera alors en partant d' un point donné, la matrice de transfert associée au trajet de l' orbite périodique triangle, c'est à dire le chemin que prend le rayon pour retourner à sa position initiale. Ainsi on schématisera le chainage de matrices nécessaire, en notant que les réflexions sur les parois incurvées se font suivant un angle θ défini en partie 1. De plus la paroi tronquée possède un rayon de courbure infini. La matrice de transfert associée à la réflexion du rayon lumineux sur cette paroi revient à l' opposé de la matrice identité 2×2 .



- ① Propagation sur une longueur l
- ② Réflexion sur la paroi incurvée
- ③ Propagation sur une longueur d
- ④ Réflexion sur la paroi incurvée
- ⑤ Propagation sur une longueur l
- ⑥ Réflexion sur la paroi tronquée

fig 3.1 Schéma décrivant le chainage de matrice

Vert : Propagation
Rouge : Réflexion

On obtient alors :

$$M = \begin{bmatrix} 3 - 2 \cdot \sec(\theta) \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)} & R \cdot (-2 \cdot \cos(\theta) - 5 \cdot \sec(\theta) + 3 \sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)} - 4 \cdot \tan(\theta)) \\ -4 \cdot \frac{\sec(\theta)}{R} & 3 - 2 \cdot \sec(\theta) \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)} \end{bmatrix}$$

Pour un rayon unité et l' angle défini en partie 1, on obtient les valeurs numériques suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} -2,4641 & -1,1800 \\ -4,2983 & -2,4641 \end{bmatrix}$$

La matrice de transfert ayant été définie, il est maintenant essentiel de calculer les valeurs propres de celle-ci afin d'obtenir des informations sur la stabilité de l'orbite triangle.

L'équation aux valeurs propres étant : $Det(M - \lambda_{\pm} \cdot I) = 0$

Les valeurs propres obtenues s' écrivent analytiquement ainsi :

$$\lambda_+ = 3 - 2 \cdot \sec(\theta) \left(\sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)} + \sqrt{6 + \cos(2 \cdot \theta) + 4 \cdot \sin(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)}} \right)$$

$$\lambda_- = 3 + 2 \cdot \sec(\theta) \left(-\sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)} + \sqrt{6 + \cos(2 \cdot \theta) + 4 \cdot \sin(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \sin(\theta)}} \right)$$

Les valeurs numériques des λ trouvées sont :

$$\lambda_+ = -4,716 \quad \lambda_- = -0,2120$$

De même la trace associée est : $Tr M = -4,9282$

3.2) Valeurs caractéristiques de l'instabilité

On sait que : $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (Tr M_N \pm \sqrt{[(Tr M_N)^2 - 4]})$

On obtient : $|Tr M| > 2$: de là on en déduit que les valeurs des λ sont réels, il existe alors dans la dynamique qui régit l' évolution des écarts à l' orbite périodique, un terme exponentiel croissant qui tend à faire diverger le rayon hors de l' orbite périodique triangle . On en déduit que l' orbite OP3 n' est pas stable.

Ainsi, l'orbite périodique triangle possède un comportement instable que l'on va caractériser quantitativement à l'aide d'un coefficient d'instabilité η appelé exposant de Lyapunov.. Comme nous l' avons vu un système chaotique amplifie l' erreur sur les conditions initiales selon une loi exponentielle croissante, de telle sorte qu'une erreur minime ferait diverger le rayon hors de l' orbite. Si l' orbite était stable, alors le système se stabiliserait autour de la trajectoire étudiée. Soit l' exposant : $\eta = \ln(|\lambda_+|)$ et la valeur numérique associée est: $\eta = 1,551$

Un raisonnement similaire aurait put être mené sur des orbites périodiques différentes de l'OP3, afin d' obtenir une comparaison quantitative entre les différentes orbites périodiques on introduit le coefficient μ tel que $\eta = \mu L$ soit : $\mu = \ln(|\lambda_+|) - \ln(L)$ (où L est la longueur de l' orbite)

On obtient la valeur numérique pour l' OP3 : $\mu = 0,352$

3.3) Points auto-focaux

Un ensemble de trajectoires voisines d'une orbite périodique issu de certains points se re-focalisent sur ces mêmes points après avoir effectué une période.

Ces points sont appelés *points auto-focaux* et sont caractéristiques de l' orbite périodique étudiée. En effet, dès lors qu'un ensemble de rayons est proche d'une orbite périodique, On peut montrer qu'en ces points, la densité des rayons tend vers l'infini.

Ceux-ci seront importants lors du passage de la dynamique des particules classiques à celle des ondes dans le billard étudié.

Afin de les calculer, on suppose qu'il existe un point auto-focal sur la trajectoire diagonale à une distance δ de la condition initiale. En partant de ce point et pour un tour complet le long de l'orbite, la nouvelle matrice de transfert obtenue sera de la forme $\begin{bmatrix} a(\delta) & b(\delta) \\ c(\delta) & d(\delta) \end{bmatrix}$

Pour que le point à la distance δ suivant l'orbite périodique soit un point auto-focal, la condition nécessaire est $b(\delta) = 0$ car l'annulation de ce terme est associée à une densité de rayon infinie

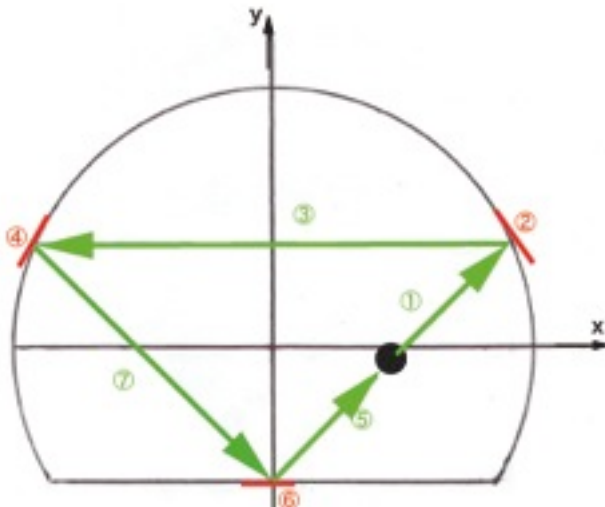


fig 3.2.a Schéma décrivant le calcul du point auto-focale sur la trajectoire diagonale

- ① Propagation sur une longueur δ
- ② Réflexion sur la paroi circulaire
- ③ Propagation sur une longueur d
- ④ Réflexion sur la paroi circulaire
- ⑤ Propagation sur une longueur l
- ⑥ Réflexion sur la paroi tronquée
- ⑦ Propagation sur une longueur $(l - d)$

Vert : Propagation
Rouge : Réflexion

D'où, après le chainage de matrices, l'équation obtenue pour le point auto-focal représenté sur la figure 3.2.a est :

$$5,7662 + \delta(-13,856 + 7,445 \cdot \delta) = 0$$

On obtient 2 valeurs, seule la valeur $\delta = 0,6281$ reste dans l'orbite périodique, la seconde étant plus grande que la longueur de la trajectoire diagonale.

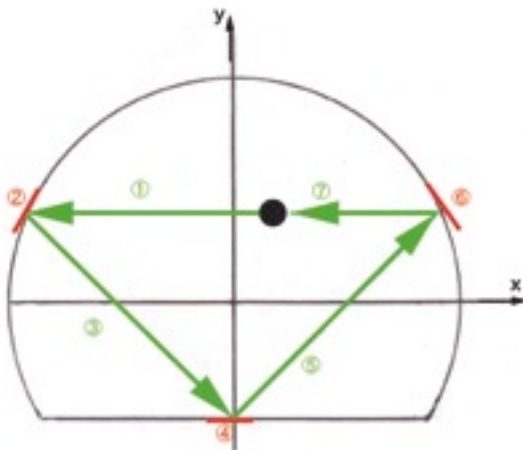


fig 3.2.b Schéma décrivant le calcul du point auto-focale sur la trajectoire parallèle

- ① Propagation sur une longueur δ
- ② Réflexion sur la paroi circulaire
- ③ Propagation sur une longueur l
- ④ Réflexion sur la paroi tronquée
- ⑤ Propagation sur une longueur l
- ⑥ Réflexion sur la paroi circulaire
- ⑦ Propagation sur une longueur $(d - \delta)$

Vert : Propagation
Rouge : Réflexion

Seulement il existe plus d'un point auto-focal, afin de trouver un second point auto-focal représenté sur la figure 3.2.b, on reprend le même raisonnement sur la distance d , on obtient de nouveau une équation :

$$5,7662 + \delta(-10,928 + 4,298 \cdot \delta) = 0$$

On obtient 2 valeurs, seule la valeur $\delta = 0,7473$ reste plausible.

Afin de trouver les autres points auto-focaux, on utilise un argument de symétrie.

Le raisonnement fait pour les 2 points trouvés peut se répéter en inversant la coordonnée x . En effet si l'on propose le changement de x en $-x$, le sens de propagation est alors inversé et les 2 autres points auto-focaux apparaissent.

Sur les coordonnées des points auto-focaux, cela revient à inverser les x . On obtient donc les coordonnées des points auto-focaux :

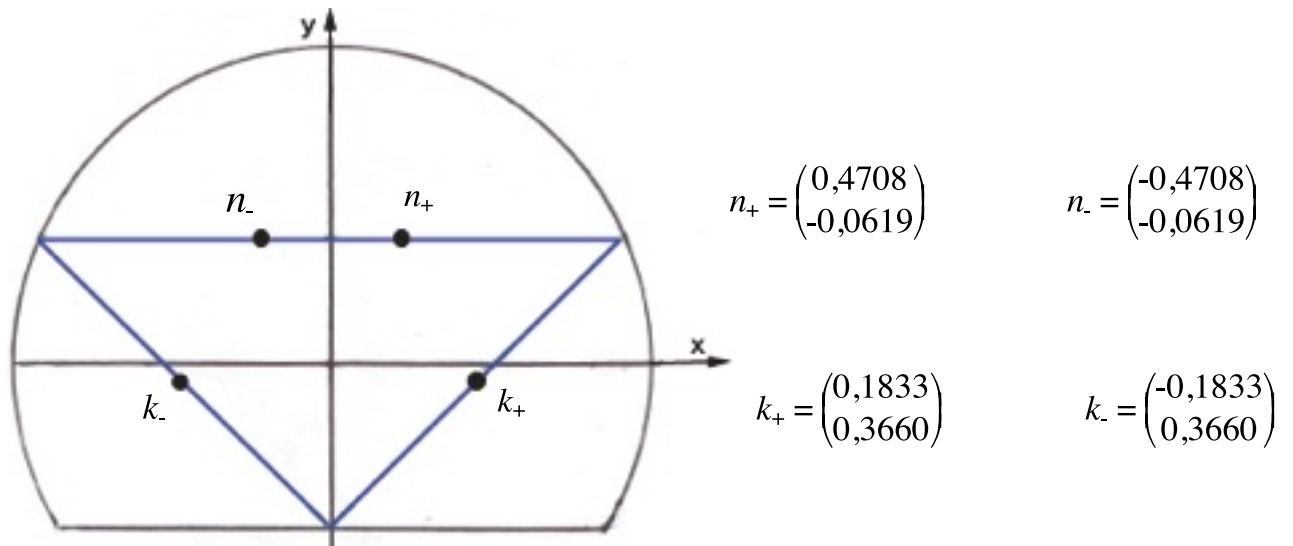


fig 3.3 : Schéma récapitulatif des points auto-focaux de l' OP3

4) Conclusion :

De l' étude de la géométrie de l' OP3, on a déduit les angles et longueurs relatifs à cette trajectoire périodique.

Ces caractéristiques déterminées, on a pu démontrer par une étude de la dynamique de rayons autour de l' OP3 dans le billard que l'orbite triangulaire était instable. Finalement, on a localisé les points auto-focaux de l' OP3.

L' étude de la géométrie chaotique de ce système s' inscrit dans une étude préliminaire où l'influence de la dynamique des rayons agit sur le comportement des ondes car contre toute attente, lorsque l'on va passer des rayons aux ondes on se rendra compte que ces ondes vont concentrer une grande part de leur énergie le long de ces trajectoires. Ce «gel du chaos» par les ondes donne lieu à l'existence de modes appelés «Scars», qui portent les traces des orbites périodiques.

5) Remerciements :

Nous tenons à remercier nos coordinatrices tant pour leur disponibilité que pour les précieux conseils fournis tout au long de ce stage.

6) Bibliographie :

- [1] : Valérie Doya, *Thèse de Doctorat : Du Speckle aux Scars, une expérience de chaos ondulatoire dans une fibre optique*, Nice, 2000.
- [2] : Claire Michel, *Thèse de Doctorat, Chaos Ondulatoire en Optique Guidée : Amplificateur fibré double-gaine pour la génération de modes « scar », chapitre 1:Regards Croisés*, Nice, 2009.
- [3] : José-Philippe Pérez, *Fondements et Application : Optique*
- [4] : Claude Gignoux, Bernard Silvestre-Brac *Mécanique. De la formulation Lagrangienne au chaos hamiltonien*