

Propriétés statistiques d'un modèle simple de formation de fils

Cele and Marielle

*Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia Antipolis,
UMR 7351 CNRS , Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France*

(Dated: May 21, 2012)

Abstract

Sommaire:

I. INTRODUCTION

II. MODÈLE DE VICSEK

III. NOTRE MODÈLE

A. Système initialement désordonné.

1. *Etude de la stabilité du système pour différents γ , $\eta=0$, et $\eta\neq 0$.*
2. *Etude de la stabilité du système plus grand, de densité et γ constante, $\eta=0$.*

B. Système initialement ordonné.

1. *Etude de la stabilité du système de 20 particules pour différents bruits.*
2. *Etude de la stabilité du système de 500 particules pour différents bruits.*

IV. CONCLUSION.

V. BIBLIOGRAPHIE.

PACS numbers:

VI. INTRODUCTION

Il est immuable de constater l'existence de l'intelligence collective dans l'espèce animale. De fait l'environnement et les relations propre à chaque espèces interfèrent dans leur comportement et leur choix de vie. Leur grègarisme les avantages dans la chasse contrairement à une prédominance de caractère solitaire. Ainsi, on peut alors observer des formations de bancs de poissons évitant toutes collisions. Nous avons donc cherché à montrer l'intrication savante des méthodes de déplacement animal, comme pour les chenilles processionnaires qui se déplacent les unes derrière les autres en se touchant avec leur poils. Par ailleurs la formation en V des oies sauvages leur permettent d'étendre leur distance de vol de près de 70% car chaque oiseau prend l'aspiration de son prédécesseur. Ils est donc important pour eux d'optimiser leur déplacement en terme d'énergie. Outre le phénomène psychique de suivre les autres, nous constatons aussi différentes formes d'intelligence collective selon le type de communauté: cette tendance instinctive qui pousse les individus d'une même espèce à adopter le même comportement n'est pas la même chez les fourmis qui communiquent par le biais de phéromones, que chez les moutons qui utilisent la vue. Le but de notre projet est donc de comprendre les interactions stochastique à courte portée, qui conduit à l'auto-organisation collective des animaux à l'échelle du système. Nous étudierons dans un premier temps le modèle de Vicsek, qui nous propose une dynamique collective engendrée par les interactions entre les animaux, pour ensuite présenter le modèle étudié tout au long de ce projet. Nous avons porté notre attention sur le mouvement collectif de particules générées par programme informatique. En réalité, ce n'est qu'une description simplifiée de systèmes omniprésents dans la nature car de nombreux paramètres biologiques et facteurs environnementaux interviennent.

VII. MODÈLE DE VICSEK

Le comportement de tout animal, ou individu est toujours plus ou moins influencé, par ceux qui sont le plus proche dans l'espace. Vicsek propose un modèle, permettant de décrire le mouvement collectifs des animaux à partir d'interactions entre plus proches voisins. Prenons un système, 2 dimensions de taille L avec N particules, possédant chacune un même module de vitesse V_o un rayon d'intéraction R et un champ de vision πR^2 (une

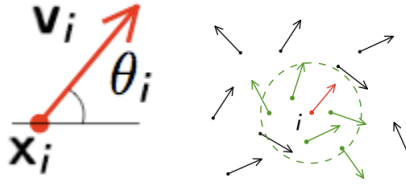


FIG. 1: Direction de la particule (i), le disque de rayon R détermine quelles sont les particules présent en compte pour évaluer cette moyenne.

particule est capable de "voir" ce qui se trouve dans son champ de vision), constant au cours du temps (voir fig:1).

Initialement, toutes les particules sont distribuées dans la boîte, avec une direction, repérée par un angle θ aléatoire pour chaque particule de notre système.

Leurs mouvement est de sorte, que si la distance qui sépare deux particules (i) et (j) est inférieure ou égale à la valeur de R, alors (i) va tenter de s'orienter selon la moyenne des vitesses locales de toutes les particules appartenant à son champs de vision, y compris la sienne. Les N particules adoptent le même processus, et de ces interactions à courte portée entre particules naît une dynamique collective à longue portée. La direction de chacune d'entre elles est sans cesse modifiée, jusqu'à ce qu'elles aient toutes la même direction à la fin d'un temps plus ou moins long.

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{V}(\theta_i) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| < \epsilon} \sin(\theta_j - \theta_i) + \eta_i \quad (2)$$

où le term $\mathbf{V}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, et n_i le nombre de particules dans le rayon d'interaction.

Ce bruit appelé η , dont les conséquences à chaque instant t sur l'ensembles de nos particules, est de perturber leur direction de $\Delta\theta$, de façon à ce que leurs chemin soit dévié tout les Δt .

Par exemple, ajoutons un bruit au système initial à un instant t, au temps $t + \Delta t$, une particule (i) ne verra plus les même particules (j) dans son champ de vision, la moyenne des direction que (i) doit suivre est donc altérée à chaque Δt , plus l'amplitude du bruit est forte plus $\Delta\theta_i$ est important, c'est pourquoi il devient impossible que les particules s'orientent toutes de la même façon si η est trop élevé. Le système sera désordonné.



FIG. 2: modélisation de Vicsek, pour $N=20, L=60, \eta=0$; analogie; $\eta=0.4$.

Pour connaître la stabilité d'un système il existe un paramètre d'ordre ξ , qui représente la vitesse moyenne de l'ensemble des particules, dont les valeurs sont comprise entre 0 et 1 respectivement, système désordonné et parfaitement ordonné. Entre ces deux limites le système atteindra une certaine stabilité, qui dépendra du nombre de particules dans le même sens de déplacement, ξ est le pourcentage de particules qui se déplacent dans la même direction.

$$\xi(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}(\theta_i)(t) \right| \quad (3)$$

Le modèle de Vicsek permet la modélisation, de mouvements collectif tel qu'un banc de poissons, dont le bruits serait la houle (parmi bien d'autres possibilités), qui selon l'intensité, les éloignent les uns des autres les empêchant de formés une unité stable. Il montre que l'ordre à longue portée (à l'échelle d'un système) en 2 dimensions avec des interactions de courte portée est possible. Cela prouve la nature hors d'équilibre de ce modèle, car le théorème de Mermin-Wagner interdit les corrélations à longue distance dans un système en équilibre à cause des fluctuations.

VIII. NOTRE MODÈLE DE FORMATION DE CLUSTERS (PARTICULES EN LIGNES)

A. Système initialement désordonné.

1. Etude de la stabilité du système pour différents γ , $\eta=0$, et $\eta \neq 0$.

Notre modèle décrit le comportement collectifs à courte portée, tel que celui des moutons qui utilisent leur vue afin de se rapprocher du groupe. Il explique l'apparition de ligne chez certains insectes comme les fourmis et les chenilles processionnaires, nous prenons pour notre modèle les même hypothèses initiales que celui de Vicsek. Nous rajoutons cependant au champ de vision une restriction, définit par un angle de vision γ entre 0 et 2π , dont le milieu est la direction de la particule.

Nous nous sommes penché sur la stabilité d'un système de N particules ayant toutes le même γ que nous choisissons plus ou moins étroit. En fonction de la largeur de cet angle γ , nous chercherons à déterminer la stabilité de notre système. Le paramètre d'ordre atteindra une valeur de 1 constante au cour du temps, lorsque toutes formerons un ou plusieurs clusters de particules alignées.

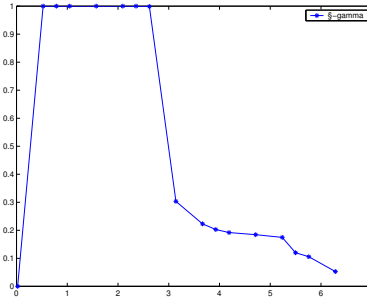


FIG. 3: $N=20, L=60, \langle \xi \rangle$ en fonction de l'angle de vision γ compris entre 0 et 2π , $\eta=0$.

Une particule (i) doit suivre sa plus proche voisine (j), ce trouvant dans son champ de vision, sinon il lui est impossible de la détecter. C'est différent du modèle de Vicsek, pour lequel une particule (i) devait s'orienter selon la moyenne des directions de toutes celles appartenant dans son rayon d'interaction R. Dans notre modèle la particule (i) s'oriente vers la position de la particule la plus proche appartenant à son champ de vision délimité par γ .

Les expériences effectuées pour différents γ (voir fig:3) ont révélés, que plus le champ de

vision des particules est large, soit γ grand, plus (i) voit de particules qui lui sont proche. Pour $\gamma > \pi$, la particule (i) dépasse l'angle de vision critique l'empêchant de s'orienter à des particules étant dans le sens de sa direction, et la probabilité que l'une d'elles (g) soit derrière, croît; l'obligeant à faire des rotations sur elle même pour suivre (g). L'exemple du chien qui tourne sur lui même pour attraper sa queue. Ce qui explique la formation de boules pour des angles plus large(voir fig:5). Le systeme ne s'ordonnera plus en lignes et la $\langle \xi \rangle$ pour ces angles, sera différente de 1 car il ne se stabilise jamais. L'analogie avec les chenilles processionnaires, qui lorsque elles sont trop proche les une des autres, ne savent plus qui suivre, car les poils de toutes les autres les touchent, d'où la formation de ce genre de "boules". La dynamique de notre modèle peut être décrite comme:

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + v_o \mathbf{V}(\theta_i(t)) \quad (4)$$

$$\theta_i(t + \Delta t) = \alpha(\mathbf{x}_i, \theta_i(t); \gamma) + \eta_i, \quad (5)$$

où le terme $\alpha(\mathbf{x}_i, \theta_i(t); \gamma) = \text{atan2}(\mathbf{x}_{pp} - \mathbf{x}_i)$, désigne la particule plus proche dans l'angle de vision γ . Les paramtres principaux de ce modle sont donc le bruit η , la densit de particules, la vitesse V_o , γ l'angle de vision. Pour mesurer l'ordre d'un système nous utilisons l'équation (3). Nous étudions le comportement du système sans bruit, la fluctuation du paramètre d'ordre (4)(5), lorsque γ croît indique, que le système tend à se désordonné, car il y a trop d'interactions entre les particules.

C'est pourquoi à un instant t, ξ peut atteindre des valeurs proche de 1, car il y a formations de courts fils, qui à $t+\Delta t$ ce sont désagrégés, à cause d'une particule (k), qui sera à cet instant, la moins distante dans le champ de vision d'une des particules (i) formant un fil, et ainsi dissoudra le cluster de particules ayant réussis à se suivre. De ce fait ξ ne sera jamais constant car le système est désordonné(voir courbe 5).

Nous ajoutons un bruit η , dans un système de particules ayant chacune un $\gamma=\pi/3$, qui selon l'amplitude ne permettra plus la formation d'un cluster de particule. Les propriétés du bruit dans un système perturbés: valeur moyenne du bruit propre de chaque particule $\langle \eta_i \rangle = 0$, car il y a la même probabilité de dévier une particule de $\pm \Delta \theta$ par rapport à sa direction. Et $\langle \eta_i^2 \rangle = \eta^2 / 12$.

Ce bruit est le même que celui définit dans le modèle de Vicsek, lorsqu'il atteint une valeur

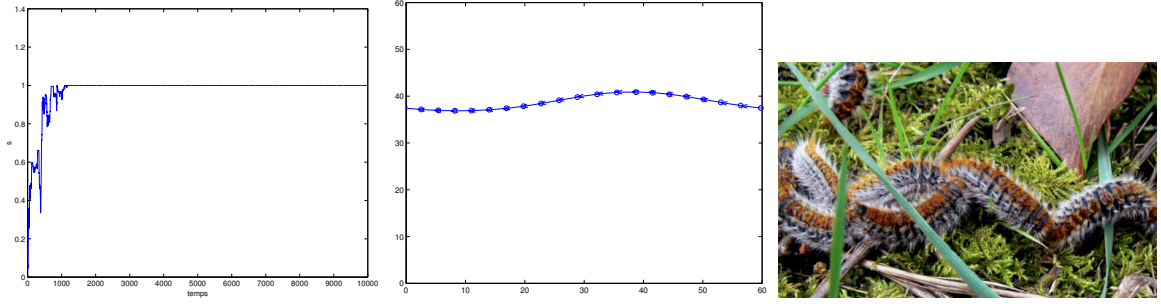


FIG. 4: $N=20, L=60$ stabilité du système à $\eta=0, \gamma=5\pi/6$; analogie.

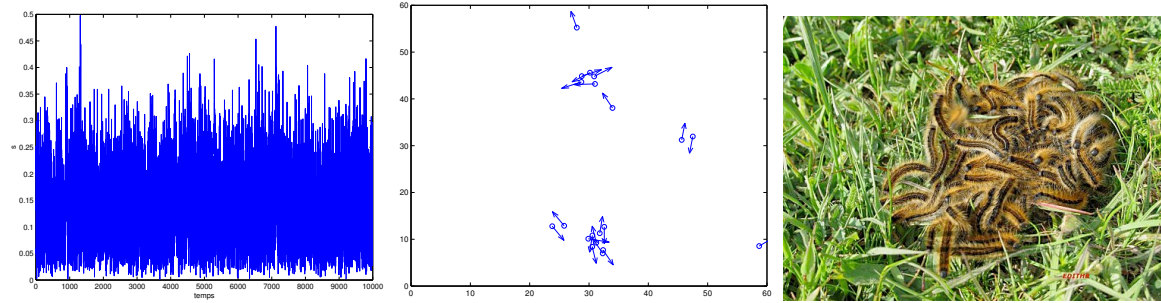


FIG. 5: $N=20, L=60$, instabilité du système à $\eta=0, \gamma=3\pi/2$; analogie.

trop importante, on considère que les particules sont aveugles. Par exemple, (i) détecte à l'instant t une particule (j_t) dans son champ de vision, elle va se diriger dans sa direction pour la suivre, mais à l'instant Δt d'après η aura dévié la direction θ_i de $\Delta\theta_{max}$, (i) n'aura plus le même champ de vision selon le $\Delta\theta$ quelle aura reçue, plus le bruit est grand plus la particule est déviée, bien que γ ne change pas au court du temps, il est orienté différemment, la particule regarde dans un autre sens. La particule (i) se dirigera vers la particule qui lui est

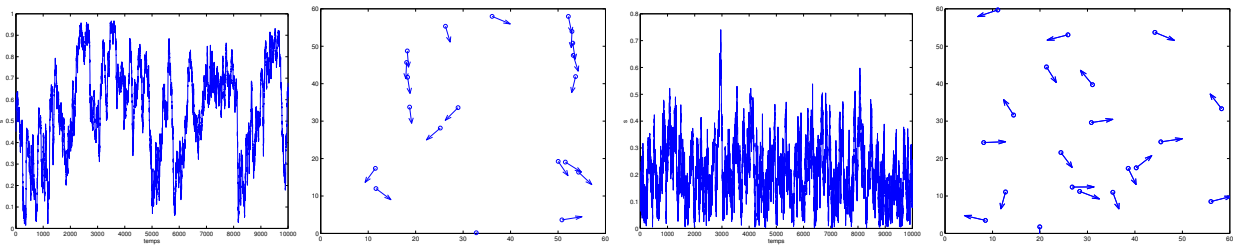


FIG. 6: Influence d' η sur la stabilité pour $\gamma=\pi/6$: $(\eta=0.3) < \gamma$; $(\eta=0.55) > \gamma$

la plus proche tout les $t+\Delta t$, il lui est impossible de suivre une même particule 2 intervalles de temps consécutifs, l'intensité critique de η est la valeur de l'angle de vision des particules, $\Delta\theta > \gamma$, le système sera désordonné du début a la fin de la simulation. Prenons pour exemple, le comportement d'une colonie de fourmis dans leur activités de fourragement (qui consiste

à aller chercher des ressources dans l'environnement et les ramener dans la fourmilière). Le bruit dans ce cas est la température, nous savons qu'une phéromone est à l'origine de leur alignement et selon le taux d'évaporation de cette phéromone elles peuvent se suivre les unes derrière les autres à distance plus ou moins courte en fonction de la détection de celle-ci, plus la température est élevée, plus l'évaporation est rapide, les fourmis devront se suivre de plus près et vice-versa. Il existe une température critique pour laquelle les fourmis devront se suivre de plus près pour garder leurs alignement. (voir fig:6)

2. *Etude de la stabilité du système plus grand, de densité et γ constante, $\eta=0$.*

Nous avons fait des simulations pour des systèmes plus grand avec une même densité de particules, bruit nul et $\gamma=\pi/6$. Densité= N/L^2 =Constante. Les résultats montrent que plus le nombre de particules est élevé, moins il devient possible de trouver une ligne de particules stable, ξ décroît le système tend au désordre. Par exemple, dans une pièce il y

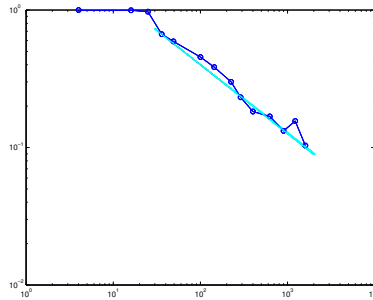


FIG. 7: Systèmes de même densité $\eta=0$, ξ en fonction de N (échelle log-log), avec pente.

a des molécules qui bougent, avec une direction aléatoire et en fonction de la température, leur vitesse peut être considérée comme constante, la probabilité que 3 particules se trouvent dans une moitié de la boîte est proche de 1 à un instant t . Dans une boîte beaucoup plus grande avec 10^{24} particules, la probabilité qu'elles se trouvent toutes au même moment dans une moitié de la boîte est quasi nulle. C'est pourquoi ξ d'un système ayant un grand nombre de particules ne se stabilisera pas, et n'atteindra sans doute jamais la valeur de 1, car il y a trop d'interactions entre les particules pour que, les lignes qui se forment soit durables et stables dans le temps, ou que toutes soient parallèles, distantes de R pour qu'aucune ne soit dans le champ de vision d'une autre, et ce tout au long du temps de simulation. La variation du nombre de particules dans l'espace est un facteur extrêmement important pour

le mouvement collectif, car elle permet la formation en lignes des particules. (voir fig:7)

B. Système initialement ordonné.

Intéressons nous à un système initialement ordonné, puis étudions en fonction du bruit sa capacité à se re-stabilisé. Il s'agit de la même dynamique que le modèle de particule aléatoirement distribuées , seulement nous modifions les conditions initiales des particules. Les résultats précédents nous ont permit de savoir que lorsque $\gamma=\pi/6$ et $\eta=0$, le système se stabilisait, bien que les particules soient initialement désordonnés.

1. Etude de la stabilité du système de 20 particules pour différents bruits.

Prenons deux systèmes, de $N=20$ particules et une taille de boîte $L=60$, et $N=500$ $L=300$, dont les particules sont toutes en file. Nous ajoutons une perturbation à $t=0$ aux direction de chaque particule, d'intensité différentes pour plusieurs modélisations. Nous observons le comportement des deux systèmes: dont la dynamique correspond à (4) avec $\eta_i=0$. Pour $\eta=0$, les systèmes restent ordonnés en un cluster de particules en fil, ξ constant et égale à 1 (voir particules en vertes((8) et (9)).

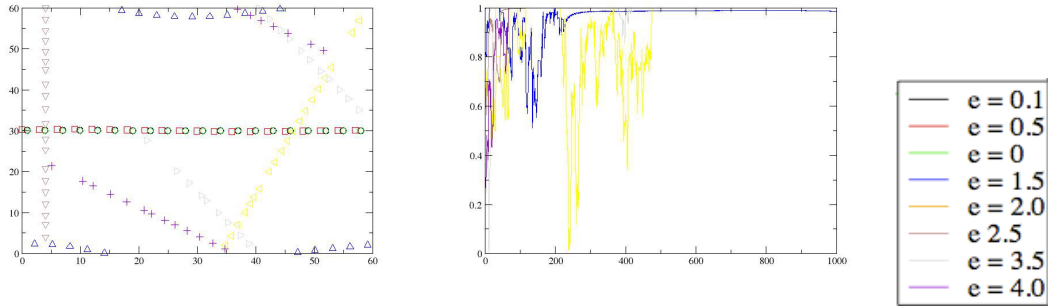


FIG. 8: Influence d' η sur un système $N=20$ $L=60$, $\gamma=\pi/6$; étude de ξ en fonction du temps; légende.

$0 < \eta < \gamma$ le système, se re-stabilisera car le $\Delta\theta$ d'une particule (i) ne varie pas suffisamment, pour que celle devant elle ne soit plus dans son champ de vision, et comme nul autres particule (k) ne peut se trouver ailleurs que dans le fil, le même cluster se reformera.

$\eta > \gamma$ le fil initial est brutalement perturbé et rapidement, il devient comme aléatoirement

distribué dans l'espace, et finira par se stabiliser, pour $\gamma=\pi/6$ le système s'ordonnait (voir fig:3). A la fin de la simulation le fil formé n'aura plus la même direction, et il y a selon le bruit initialement introduit trois mouvements différents: en anneau, le fil formé se re-ferme, en ligne non fermée, ou enfin il bouge en forme de sinus.

Nous avons remarqué une similarité avec les simulations faites pour $\eta=0$, avec des angles de vision plus ou moins étroit. C'est le cas pour un bruit nul et des particules aléatoirement distribuées à $t=0$, lorsque $0<\gamma<\pi$ (quand $\xi=1$) (3), nous savons que les particules à la fin des simulations s'ordonnent, et leur mouvement correspond à ce type de comportement sinusoïdale pour ($\gamma=\pi, 5\pi/6$), anneau, et en ligne. Il ne s'agit peut être que d'une coïncidence car quelque soit les conditions initiales, le système doit avoir le même mécanisme d'interaction avec ses plus proche voisins.

2. Etude de la stabilité du système de 500 particules pour différents bruits.

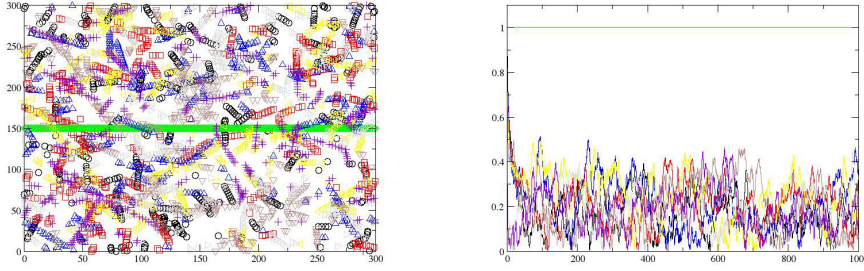


FIG. 9: influence d' η sur un système $N=500, L=300, \gamma=\pi/6$; ξ en fonction du temps

Le système de 500 particules pour $0<\eta$ ne re-deviendra plus stable, en réalité nous ne savons pas vraiment si la simulation dure un temps infini le système se re-stabilise un jour, probablement pas, car il y a formation de fil qui ne peuvent être durable à cause du nombre trop élevé de particules susceptibles d'interagir entre elles à tout instant.(voir fig:9) Il y a momentanément formation de court clusters de particule alignées. Comme pour la simulation précédent, un système à 20 particules aléatoirement distribuées pour $\eta=0$, nous remarquons que pour $\pi<\gamma$ il existait ce types de comportements.(fig:3). C'est à partir de $\pi=\gamma$, que les particules avaient de plus en plus de mal à s'aligner à causes des interactions. Comme pour un nombres de particules importantes, il devient difficile de s'aligner lorsque les interactions

se font plus fréquentes.(voir fig:3)

C. Conclusion .

Le travail présenté dans ce rapport est une simplification de la réalité, afin d'étudier le comportement collectifs d'animaux dont la dynamique est différente selon les espèces. Ces hypothèses de simplification tel que, R , V_o et le champ de vision, identiques pour toutes les particules, sont des hypothèses biologiques et physiques par lesquelles nous sommes obligé de passer, car il est impossible de prendre en compte tous les effets de l'environnement sur la communication entre les animaux, tel que la vitesse de déplacement d'une fourmis blesse ne sera pas la même que celle de ses semblable. Notre but n'était pas de reproduire le réel mouvement collectifs animal, mais comprendre et tenté de modéliser les mécanismes qui leur permettent ce types de comportement dans la nature. Naïvement, tout porte à croire que le mouvement de particules qui ne font que se suivre les unes derrière les autres, est quelque chose de simple, et pourtant il ne s'agit pas seulement de suivre la plus proche. La formation de fil requière un angle de vision ainsi que la détection dans cet angle d'une particule qui serait à une distance minimale de celle que l'on considère.

-
- [1] New journal of physics 12 (2010) 093029
 - [2] tude exprimentale et modlisation des dplacements collectifs de pitons
 - [3] B. Szabó, et al., Phys. Rev E Phys. Rev. E **74**, 061908 (2006).
 - [4] F. Peruani, A. Deutsch and M. Bär, Phys. Rev E **74**, 030904(R) (2006)
 - [5] Contrôle de densité dans les modèles de mouvement collectif
 - [6] F. Peruani, T. Klaus, A. Deutsch, and A. Voss-Boehme Phys. Rev. Lett. 106, 128101 (2011)
 - [7] Wikipedia, mouvement collectifs
 - [8] Méthodes asymptotico-numériques pour des problèmes issus de la physique des plasmas et de la modlisation des interactions sociales