

Rapport de projet tutoré - Le nouveau pendule chaotique

Ivan Coppo et Valentin Rougier
Université de Nice - Sophia Antipolis

20 Mai 2012

Nous allons étudier dans ce rapport un système dynamique non linéaire : un pendule. Ce pendule est similaire à un pendule sphérique, dont la masse est suspendue à une potence, elle-même fixée sur un disque rotatif. Quand on inclinera ce pendule par rapport à la gravité, on devrait observer un comportement *chaotique*. Le but de ce projet est donc l'étude du système lorsque le chaos apparaît, et par extension de faire une première approche d'un mouvement chaotique.

Sommaire

I. Cas du pendule simple	3
A. Equations du mouvement	3
B. Intégration des équations	4
II. Cas du pendule sphérique	4
III. Cas du pendule chaotique	6
A. Equations du mouvement	6
B. Intégration des équations	6
IV. Section de Poincaré	7
A. Cas général	7
B. Sections de Poincaré du pendule chaotique	8
V. Analyse de stabilité	9
A. Adimensionnement	9
B. Etude des points fixes	9
VI. Conclusion	12
VII. Remerciements	13
Références	13

I. CAS DU PENDULE SIMPLE

Pour commencer, nous allons étudier le cas d'un pendule simple. Il s'agit du système le plus classique en mécanique, et il constitue une bonne approche du pendule chaotique. Il est composé d'une masse m suspendue à un fil inextensible de longueur l , et faisant un angle θ avec l'accélération de la pesanteur \vec{g} .

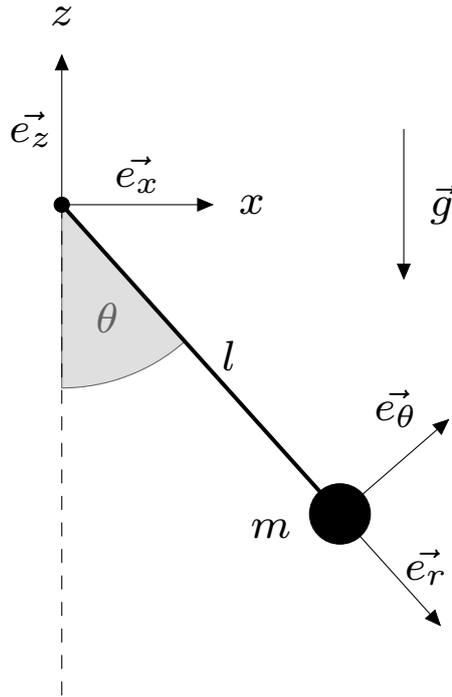


FIGURE 1: pendule simple

A. Equations du mouvement

On commence tout d'abord par trouver les coordonnées de la masse et leurs dérivées :

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = 0 \\ z = -l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

On va ensuite calculer les énergies cinétique et potentielle, et en déduire le Lagrangien associé :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{r} = mgz = -mgl \cos \theta$$

Le Lagrangien est :

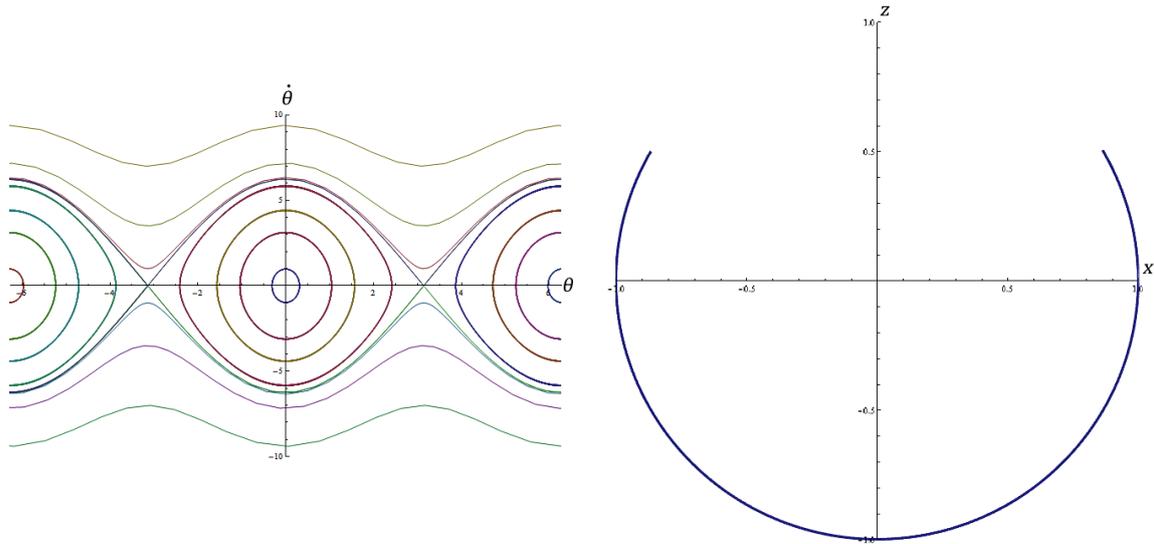
$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (1)$$

B. Integration des équations

On veut maintenant obtenir la trajectoire du pendule ainsi que son portrait de phase. Pour cela, on intègre les équations obtenues précédemment à l'aide de Wolfram Mathematica.



(a) Portrait de phase du pendule simple

(b) Trajectoire du pendule simple

FIGURE 2: Pendule simple

II. CAS DU PENDULE SPHÉRIQUE

On va maintenant reprendre le cas précédent, en ajoutant un degré de liberté. Le pendule devient alors un pendule sphérique, où la masse fait un angle φ avec le vecteur unitaire \vec{e}_x .

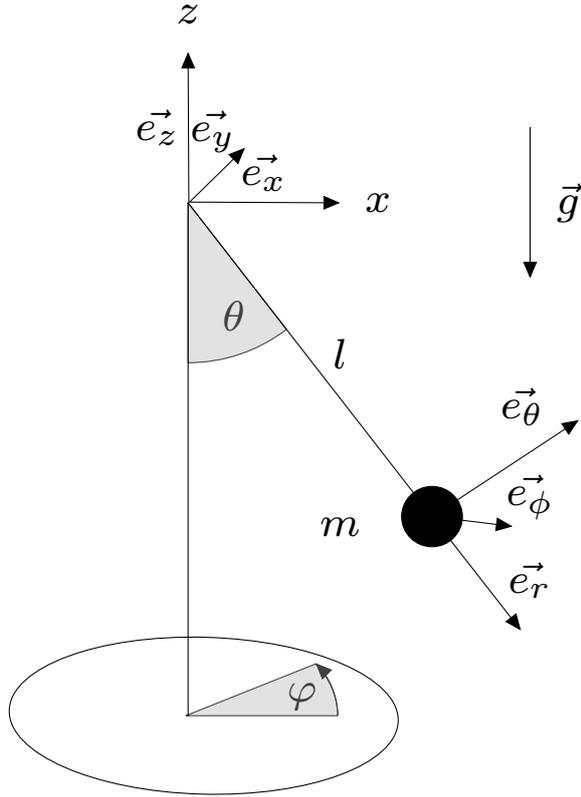


FIGURE 3: Schéma du pendule sphérique

On trouve alors, de la même manière que précédemment, les équations suivantes:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cot \theta \quad (3)$$

Pour obtenir la trajectoire du système, on intègre encore une fois ces équations:

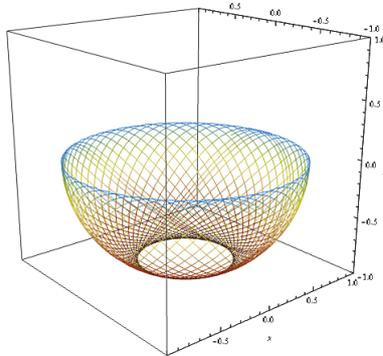


FIGURE 4: Trajectoire du pendule sphérique

III. CAS DU PENDULE CHAOTIQUE

Maintenant que nous connaissons les équations régissant la dynamique d'un pendule sphérique, on peut commencer à étudier le cas du pendule chaotique. Il s'agit en fait presque du même système, où la gravité est inclinée d'un angle α par rapport à l'axe z , dans le plan yOz , et où on ajoute un disque rotatif de masse M et de rayon R à la base du pendule. On verra donc apparaître un moment angulaire supplémentaire, qui sera à l'origine du chaos.

A. Equations du mouvement

Nous procédons de la même manière que pour le pendule sphérique. On commence par déterminer l'expression de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_p &= -\vec{P} \cdot \vec{r} = (mg \cos \alpha \vec{e}_z - mg \sin \alpha \vec{e}_y) \cdot (z\vec{e}_z + y\vec{e}_y) \\ &= -mgl(\sin \theta \sin \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha) \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie cinétique est quant à elle similaire à celle du pendule sphérique, à laquelle on ajoute le terme inertiel du disque. Cela nous donne une nouvelle expression du Lagrangien toujours à partir des équations d'Euler-Lagrange, et de nouvelles équations du mouvement :

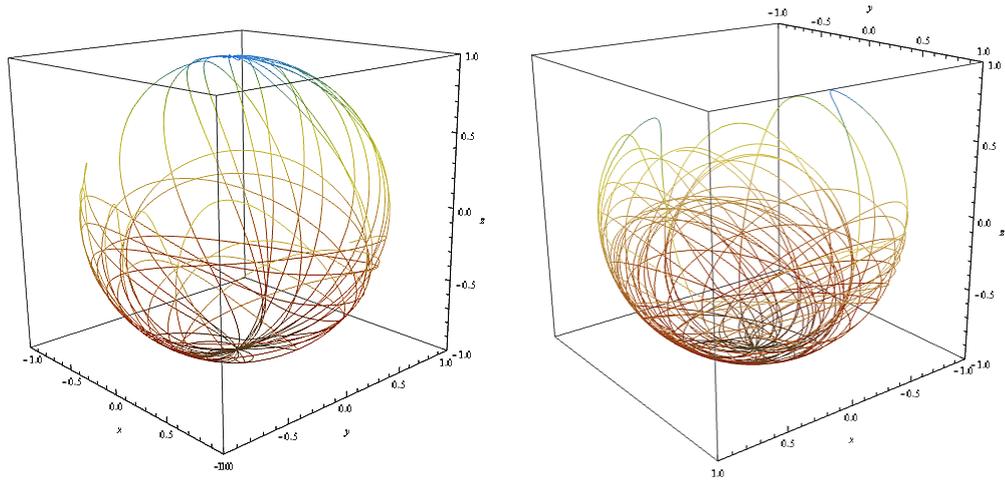
$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + mgl(\sin \theta \sin \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l}(\cos \theta \sin \varphi \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha) \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{ml \sin \theta (g \cos \varphi \sin \alpha - 2l\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)}{ml^2 \sin^2 \theta + MR^2} \quad (5)$$

B. Intégration des équations

Nous intégrons donc les équations du pendule pour obtenir sa trajectoire qui dépend des conditions initiales.



(a) Une trajectoire

(b) Une trajectoire pour des conditions initiales différentes

FIGURE 5: Trajectoires du pendule chaotique

Pour étudier plus profondément le cas du pendule chaotique nous avons besoin d'utiliser une nouvelle notion : la section de Poincaré.

IV. SECTION DE POINCARÉ

A. Cas général

Pour caractériser le comportement de notre système, nous devons utiliser une section de Poincaré. Dans notre cas, une section de Poincaré peut être vue comme un plan de l'espace qui relève la vitesse et la position du pendule quant celui-ci traverse la section.

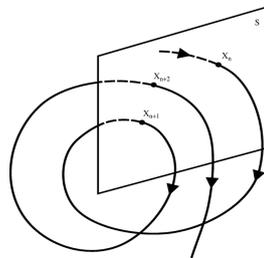


FIGURE 6: Principe de la section de Poincaré

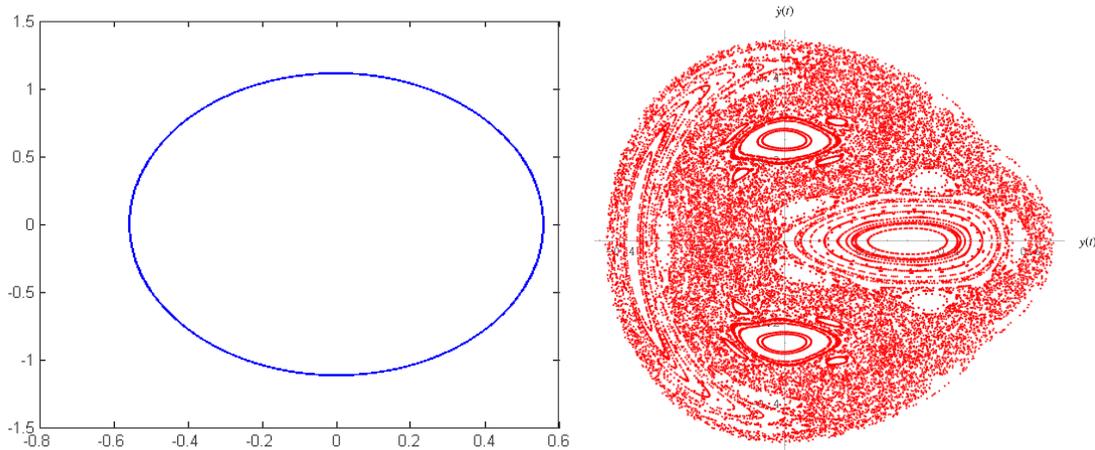
Le graphique de la section de Poincaré peut être :

un unique point: le système est périodique ;

un ensemble discret de points: le système est également périodique ;

une courbe fermée: le système est quasi-périodique ;

un nuage de points: le système est chaotique.



(a) Système quasi-périodique - image LASIN, (b) Système chaotique - image Nelson De
uni-lj [5] Leon, Indiana University

FIGURE 7: Deux exemples de sections de Poincaré

En utilisant la section de Poincaré nous pouvons maintenant connaître le comportement du pendule (périodique, quasi-périodique, chaotique) en fonction des conditions initiales.

B. Sections de Poincaré du pendule chaotique

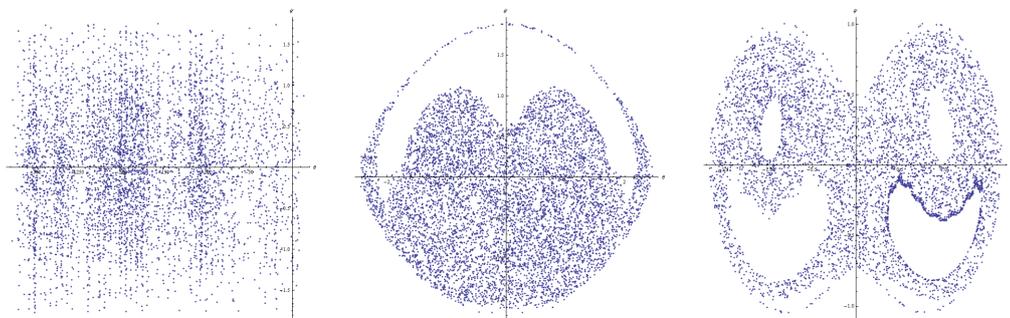


FIGURE 8: Exemples de sections de Poincaré du pendule

V. ANALYSE DE STABILITÉ

Nous allons maintenant faire une analyse de stabilité des points fixes de notre pendule chaotique.

A. Adimensionnement

Les équations (4) et (5) étant complexes, nous voulons les simplifier. Nous allons donc les adimensionner pour passer de six paramètres de contrôle à seulement deux.

On peut remarquer que $\frac{g}{l}$ est équivalent au carré de la pulsation que nous appellerons ω . On pose alors :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \omega^2 (\cos \theta \sin \varphi \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha) \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\sin \theta (\omega^2 \cos \varphi \sin \alpha - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \frac{MR^2}{ml^2}}\end{aligned}$$

Comme on l'a fait avec $\frac{g}{l}$, nous pouvons considérer que $\beta = \frac{MR^2}{ml^2}$ est un paramètre de contrôle. Il représente le rapport entre le moment d'inertie du disque et celui du pendule.

Pour finir nous changeons l'échelle temporelle. Pour cela on pose $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$, où $\tau = \frac{1}{\omega}$ est le temps caractéristique de notre système. Les équations deviennent :

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sin \theta (\cos \varphi \sin \alpha - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \beta} \quad (7)$$

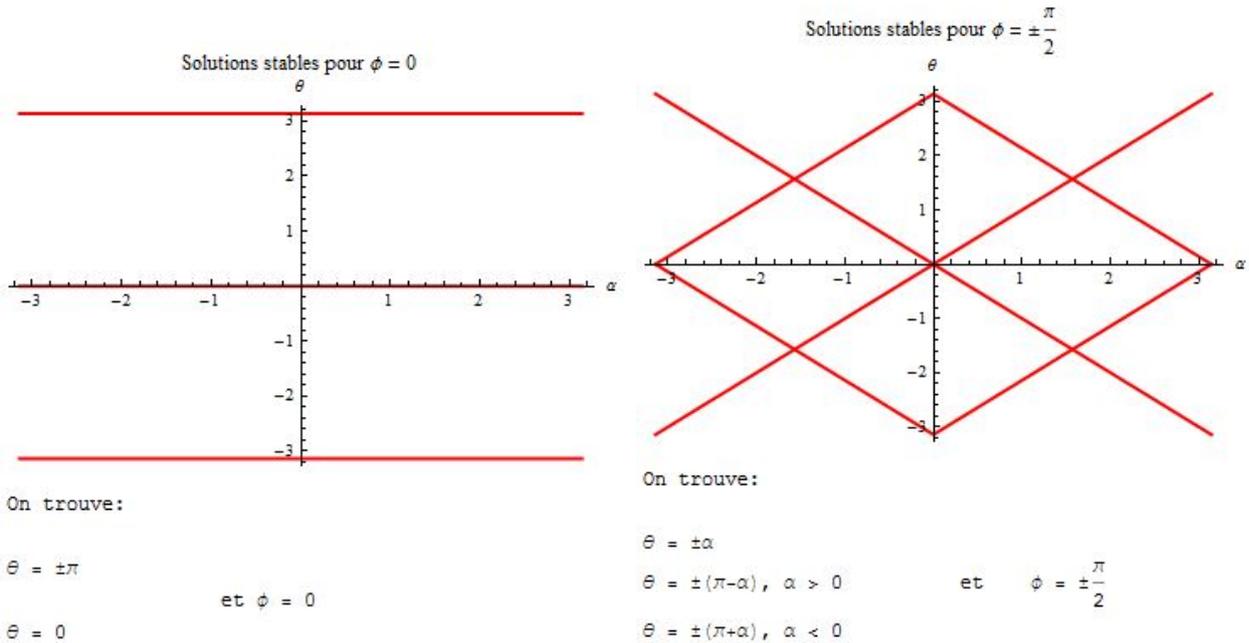
B. Etude des points fixes

Pour faire l'analyse de stabilité nous avons tout d'abord besoin de déterminer les différents points fixes de notre système. Un point fixe est un lieu de l'espace où, si l'on y met le système sans vitesse ni accélération, celui-ci n'évoluera pas au fil du temps. Il existe des points stables et des points instables. Pour trouver les points fixes nous devons poser $\ddot{\varphi} = \ddot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$ - la vitesse et l'accélération du système n'évoluent pas au niveau d'un point fixe.

Dans notre cas les points fixes vérifient :

$$\begin{aligned}0 &= \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \\ 0 &= \frac{\sin \theta \cos \varphi \sin \alpha}{\sin^2 \theta + \beta}\end{aligned}$$

Les solutions de ces équations peuvent être modélisées comme suit :



Pour déterminer si un point fixe est stable ou instable, nous allons faire une analyse de stabilité linéaire : on se place sur le point fixe, auquel on ajoute une petite perturbation. L'étude de la perturbation nous renseignera sur la stabilité du point fixe.

On va commencer par s'intéresser au point $\theta = \alpha, \varphi = \frac{\pi}{2}$. On pose $\theta = \alpha + \theta_1$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$, où $\theta_1, \varphi_1 \ll 1$ que l'on insère dans les équations (6) et (7). Après simplification et linéarisation, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\theta_1 \\ \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\varphi_1}{1 + \frac{\beta}{\sin^2 \alpha}} \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique en deux dimensions – on peut donc en déduire que ce point fixe est *stable*.

Étudions maintenant le cas du point $\theta = \pi, \varphi = 0$. En procédant de la même manière que pour le premier point, on trouve les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \theta_1 \cos \alpha - \varphi_1 \sin \alpha \\ \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\sin \alpha}{\beta} \theta_1 \end{cases}$$

On va cette fois-ci intégrer numériquement ces équations couplées et tracer les graphes de $\theta_1(t)$ et $\varphi_1(t)$ pour voir l'évolution des perturbations. On obtient ces deux courbes :

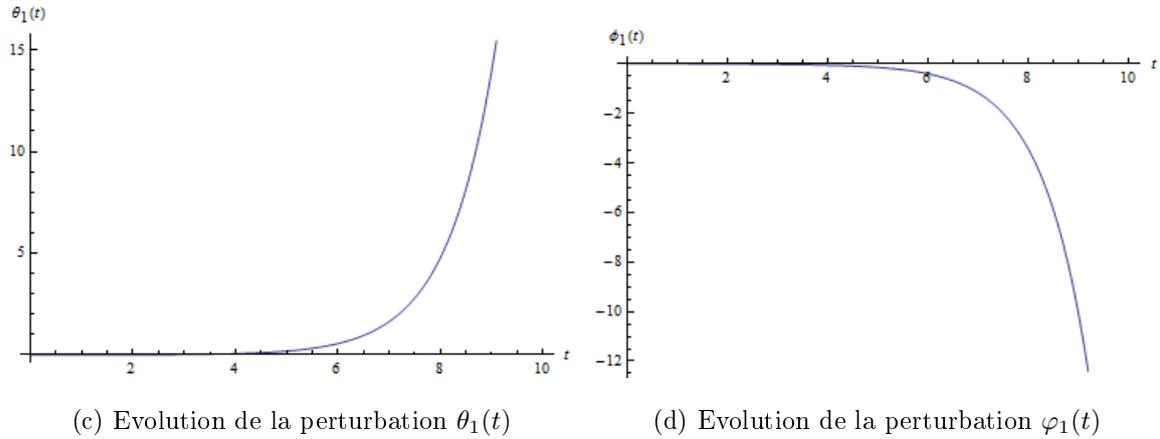


FIGURE 9: Evolution des perturbations

On voit bien que les deux perturbations divergent : ce point fixe est donc *instable*.

On peut observer que lorsqu'on lâche le pendule sans vitesse initiale au niveau d'un point instable, $\dot{\varphi}(t)$ change parfois brutalement de signe – c'est à dire que le sens de rotation du pendule s'inverse. On peut voir que l'endroit où le signe change correspond à la position d'un point fixe instable (ici le point fixe $\theta = \pi$, $\varphi = 0$).

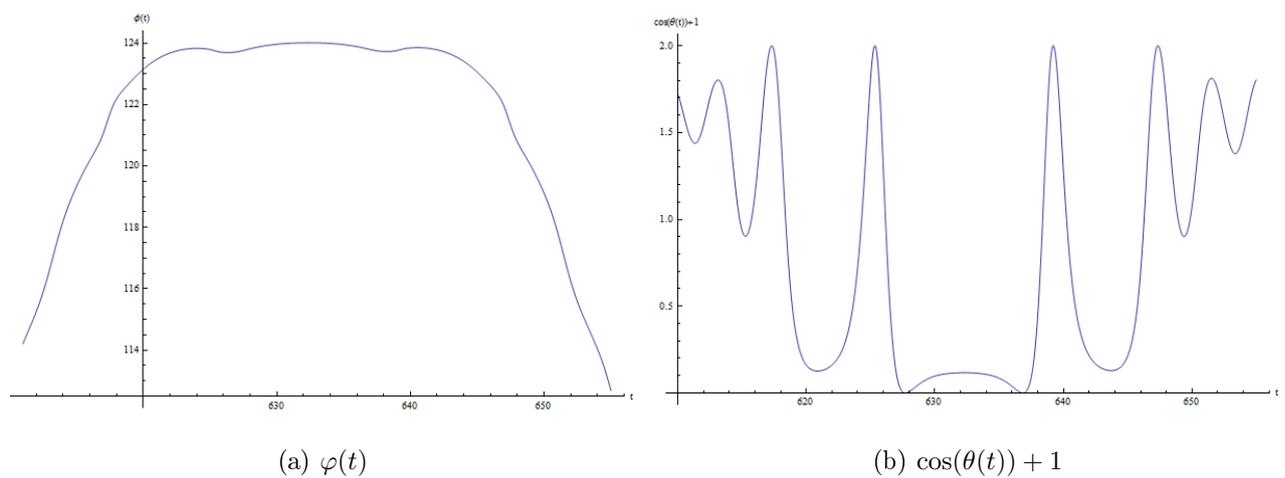


FIGURE 10: Inversion du sens de rotation au voisinage du point fixe instable $\theta = \pi$, $\varphi = 0$. On trace ici $f(t) = \cos(\theta(t)) + 1$ pour observer les points où $\theta = \pi$ en $f(t) = 0$

Pour comprendre ce comportement, on peut reprendre l'exemple du pendule simple : lorsqu'on le lâche en $\theta = \pi$ sans vitesse, il sera susceptible de voir son sens de rotation s'inverser en repassant par ce point.

VI. CONCLUSION

En partant d'un cas classique en mécanique qu'est le pendule simple et en ajoutant plusieurs degrés de liberté (angle φ , moment d'inertie du disque et inclinaison de la gravité), nous avons pu trouver les équations d'un système chaotique. Nous avons également pu visualiser les trajectoires de ce système par intégration numérique. L'étude des sections de Poincaré nous a aidé à caractériser le chaos ainsi que le comportement du système. De plus l'adimensionnement des équations du mouvement a contribué à la simplification de l'analyse de stabilité des points d'équilibre. Nous avons finalement pu trouver et caractériser les points fixes du pendule chaotique, et observer un comportement critique menant à l'inversion du sens de rotation.

Ce projet nous a permis de faire une approche numérique d'un mouvement chaotique à partir d'un système peu compliqué. Il a également contribué à renforcer nos connaissances en dynamique non-linéaire, et à nous faire découvrir de nouvelles notions et techniques (sections de Poincaré, langages informatiques, programmation).

VII. REMERCIEMENTS

Nous tenons particulièrement à remercier M. Argentina et Y. Bouret, nos tuteurs lors de ce projet en laboratoire.

Nous remercions également V. Doya pour l'organisation des projets tutorés, le laboratoire J.-A. Dieudonné, l'Université de Nice - Sophia Antipolis, Wolfram Mathematica, ainsi que nos camarades de promotion pour leur soutien.

-
- [1] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'Ordre dans le chaos* (Hermann, 1988)
 - [2] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique, vol. 1 : Mécanique* (Editions MIR, 1982)
 - [3] E. Goncalves, *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos* (Avril 2004) http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/69/72/PDF/IntroductionSystemesDynamiquesEtChaos_EricGoncalves.pdf
 - [4] V. Mallet, *Contrôle de systèmes chaotiques* (2012) <http://vivienmallet.net/chaos/index.php>
 - [5] LASIN, Univerza v Ljubljani, *Calculation and plot of the poincare section of two uncoupled osciators* (Mai 2009) <http://lab.fs.uni-lj.si/lasin/www/teaching/chaotic/Poincare/poincare1.html>