Université de Nice Sophia Antipolis

Projet Tuteuré de Licence de Physique

Année 2016

Chasse au Loup !

Étude vibratoire d'un violoncelle

Auteurs :
Gelson Furtado Borges
Maxime Martelot
Alexandre Paupy

Encadrants :
Valérie Doya
Olivier Legrand

Projet réalisé au :
Laboratoire de Physique de la Matière Condensée,CNRS

Sommaire

1 Introduction **1**

2 Système vibratoire **2**
2.1 Constitution de l'instrument 2
2.2 Une corde frottée 2
2.3 La réponse du corps 3
2.4 Facteur de qualité 4

3 Modélisation Mécanique **5**
3.1 Modélisation et validité 5
3.2 Couplage idéal 6
3.3 Couplage réel 7

4 Modélisation Électronique **8**
4.1 Transformation système mécanique / système électrique 8
4.2 Impédance 8
4.3 Existence du loup 9

5 "Tuer" le loup **10**
5.1 "Accorder" le loup 10
5.2 Absorber les vibrations du corps 10
5.3 Changer la polarisation de l'onde transversale 10

A - Modélisation Mécanique **12**
1 Équation d'onde et conditions aux limites 12
2 Calcul de ϵ 13
3 Couplage idéal 13

B - Modélisation Électronique **14**
1 Impédance d'entrée 14
2 Application au circuit équivalent 14

Chapitre 1

Introduction

La « note du loup » est un phénomène intrusif rencontré principalement sur les instruments à cordes frottées. Il s'agit d'un son au volume fortement oscillant de type battement, rappelant le hurlement d'un loup, dont l'origine vient de l'interaction entre les mouvements de la corde et le corps de l'instrument couplés grâce au chevalet.

En partenariat avec le luthier Denis Declerck, notre but a été d'apporter la vision la plus complète possible du phénomène et d'analyser l'efficacité des différentes solutions existantes à ce jour. En effet, bien que le problème soit connu depuis plusieurs siècles, seules des solutions empiriques accompagnées d'effets imprévus ont été trouvées.

Nous commencerons d'abord l'objet de notre rapport par l'étude générale des vibrations d'un instrument à cordes frottées. Lors du phénomène du loup, le couplage corde-corps par le chevalet rends l'étude séparée des deux systèmes oscillants impossible. Nous utiliserons, pour comprendre le phénomène tout d'abord un modèle mécanique, puis une analogies électronique. Enfin, nous discuterons de l'efficacité relative des différents moyens mis en œuvre pour neutraliser ce phénomène.

FIGURE 1.1 – QR code renvoyant à une vidéo où le loup se fait entendre,
`https://youtu.be/yFiJXIA7OUO`

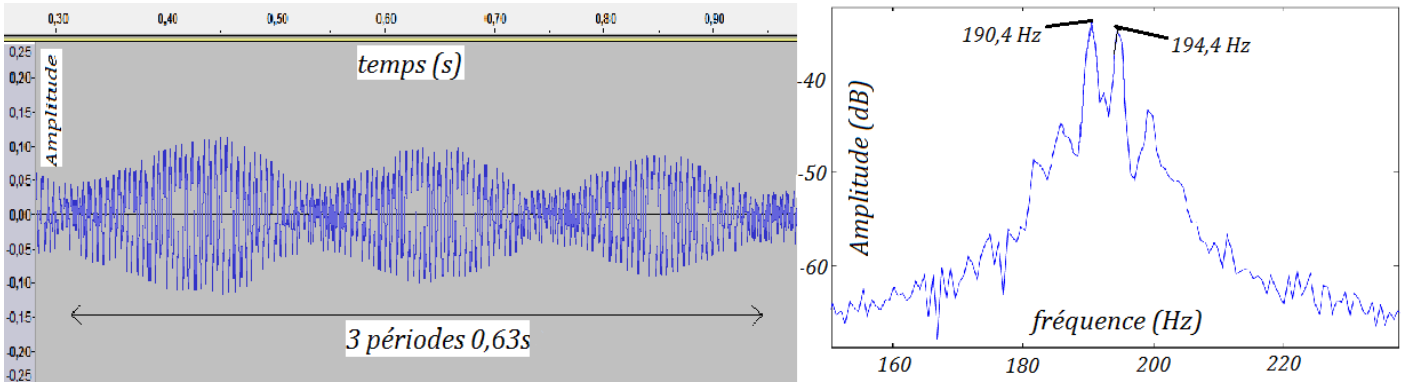

FIGURE 1.2 – A gauche l'enregistrement d'un battement de loup de période $\tau = 0.23s$ et à droite la TF du même enregistrement où apparaît distinctement deux pics espacés de $\delta f = 4Hz$. Nous avons donc bien $\delta f \simeq \frac{1}{\tau}$.

Chapitre 2

Système vibratoire

Nous allons commencer par décrire le mouvement d'une corde frottée de violon, qui est plus complexe qu'une simple oscillation sinusoïdale, avant de montrer comment le phénomène du loup modifie ce mouvement, puis introduire une première condition à son existence.

2.1 Constitution de l'instrument

Pour produire un son continu, les musiciens frottent la corde de l'instrument avec l'archet de façon transverse. La corde entre alors en vibration, son énergie est transmise par le chevalet qui assure le couplage entre les principales parties vibrantes que sont la table et le dos. Ces vibrations combinées du corps rayonnent et donnent un son. La table et le dos du corps sont connectés par l'âme qui véhicule les vibrations entre les deux parties du corps.

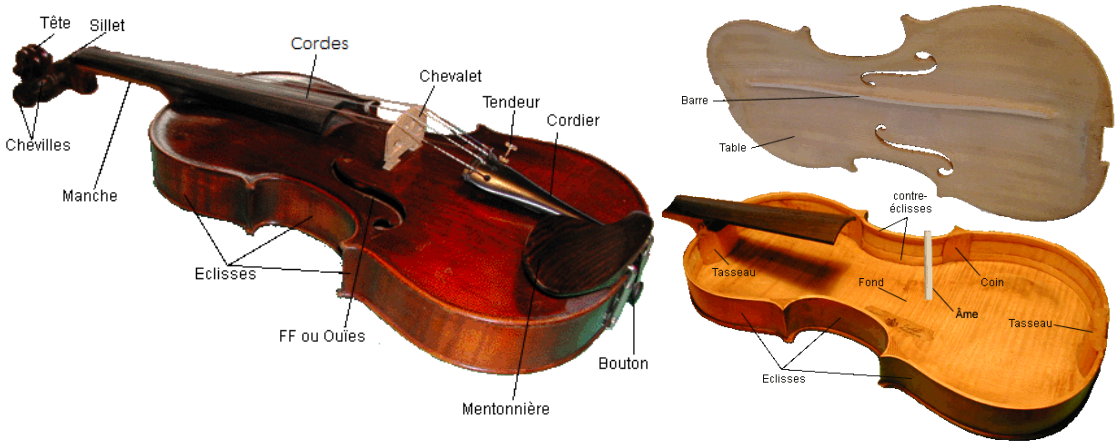

FIGURE 2.1 – Les différentes parties d'un violon

2.2 Une corde frottée

La corde tendue soumise à une perturbation transverse est un modèle connu de système vibratoire possédant une infinité de modes de vibrations dont les fréquences sont :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.1}$$

Où L est la longueur de la corde et c la vitesse de propagation de l'onde dans la corde.

En réalité, comme l'a montré Hermann von Helmholtz en 1877, le mouvement des cordes frottées est plus complexe et ressemble plus à deux lignes qui se coupent plutôt qu'une sinusoïde. Le point d'intersection, ou "pliure" se déplace le long de la corde suivant une trajectoire courbe autour de la position d'équilibre, un tour complet définit alors une période de vibration. Ce mouvement, appelé *mouvement de Helmholtz* (fig. 2.2.)

montre que l'action de l'archet sur la corde provoque une succession de phases d'adhésion et de glissement. En effet lorsque l'archet frotte la corde la phase d'adhésion s'installe jusqu'à ce que la pliure arrive au niveau de l'archet, la corde glisse alors brutalement sous ce dernier, dans le sens opposé à son déplacement, jusqu'à ce qu'il entraîne de nouveau la corde.

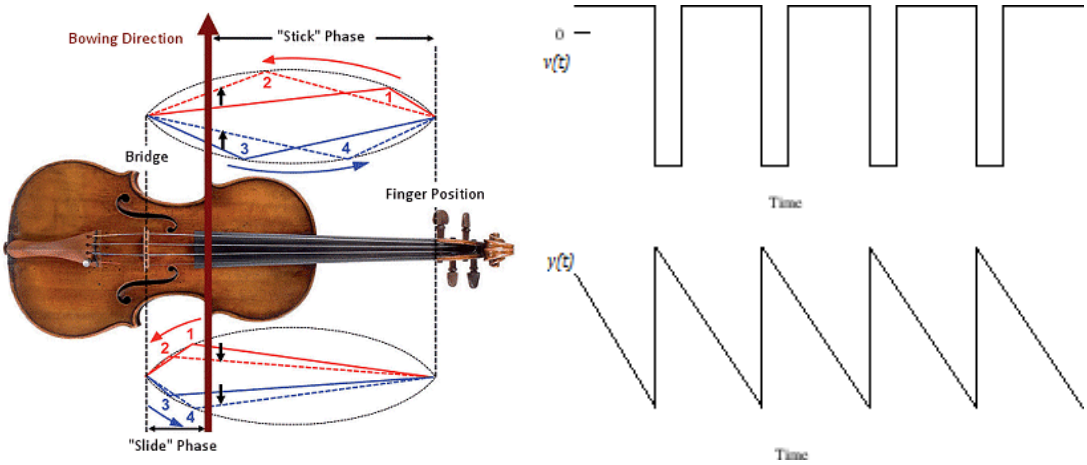

FIGURE 2.2 – A gauche, le mouvement de Helmholtz avec les phases d'adhésion/glissement[4]. A droite le déplacement $y(t)$ et la vitesse $v(t)$ du point de la corde en contact avec l'archet.[5]

Lorsque survient la note du loup, les oscillations de la corde sont perturbées, le mouvement normal de Helmholtz est dégénéré en une phase de double glissement.

2.3 La réponse du corps

Pour connaître le comportement vibratoire du corps de l'instrument, il faudrait considérer la résonance globale comprenant intrinsèquement les résonances de chaque partie produisant le son, soit la table, le dos ainsi que d'autres éléments plus minoritaires. Lors du phénomène du loup, un mode particulier du corps devient prédominant devant les autres qui seront négligés.

Ce mode, appelé $B1-$, définit la configuration vibratoire du corps, soit les ventres de vibration et les lignes nodales. Nous avons pu déterminer expérimentalement ce mode à l'aide d'un micro-cravate et en tirer une "carte des vibrations" de la table. Cette carte nous servira dans la dernière partie lorsque nous aborderons les différents méthodes à notre disposition pour résoudre le problème du loup.

Le corps de l'instrument peut être modélisé par une masse attachée à un ressort et caractérisée par une fréquence propre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \tag{2.2}$$

Avec K la rigidité du corps et M la masse effective vibrante du corps.
Nous avons pu aussi déterminer les paramètres K et M. Pour se faire, nous avons lesté dans la zone fortement vibrante, en rouge dans la fig. 2.3. La masse effective est ainsi modifiée et la fréquence de résonance dépendante de m s'exprime :

$$f_0(m) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{Mtot}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M+m}} \tag{2.3}$$

En reportant nos mesures (cercles bleus sur la fig. 2.4) nous pouvons faire une régression linéaire et obtenir la droite rouge $y(m) = \frac{1}{f_0^2(m)} = (2\pi)^2\left(\frac{M}{K} + \frac{m}{K}\right)$ de pente $\frac{(2\pi)^2}{K}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{(2\pi)^2 M}{K}$ déterminées numériquement [1]. Nous trouvons $K = 1,9778.10^6 kg.s^{-2}$ et $M = 1,2933kg$. Leur produit est très grand et nous verrons plus loin en fig. 4.2 qu'il s'agit d'un cas de couplage fort.

1. Il est important de préciser que le violoncelle est fabriqué à partir de plusieurs essences de bois. C'est donc un matériau « vivant » sujet aux modifications de température et d'humidité, c'est pourquoi les différentes constantes varient d'une semaine à l'autre.

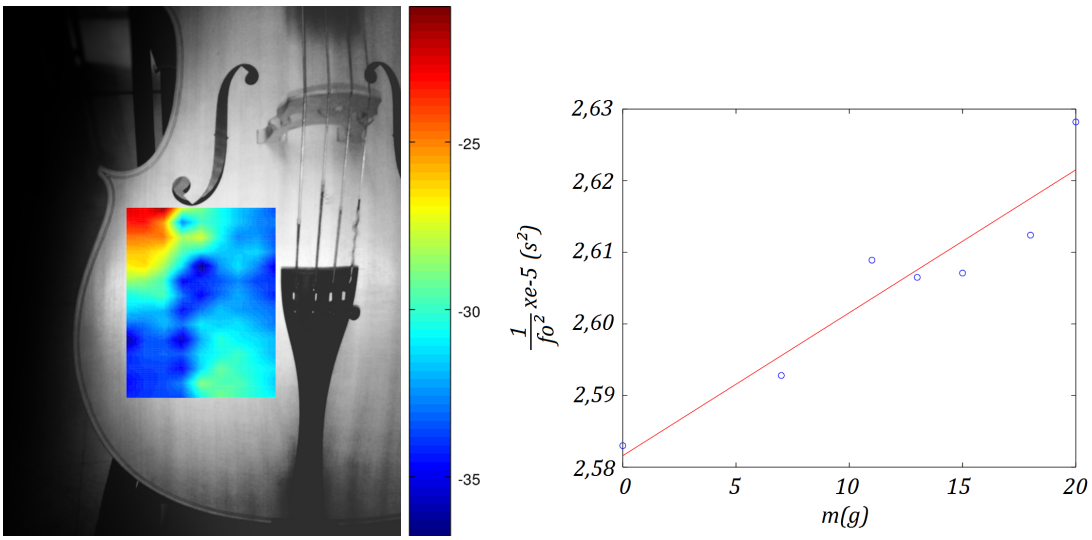

FIGURE 2.3 – (a) Amplitude de vibration de la table en dB pour la zone quadrillée. On observe bien une forte zone de vibration, en rouge, en bas à gauche de l'ouie (le f), les zone bleutées signifie que l'amplitude est plus faible.(b) Courbe de l'inverse carré de la fréquence propre mesurée en fonction de la masse totale en vibration, la courbe rouge est une régression linéaire de nos mesures en bleues.

2.4 Facteur de qualité

À la résonance, on définit le facteur de qualité du corps Q comme un rapport entre sa fréquence propre f_0 et sa largeur de bande à mi-hauteur Δf :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \tag{2.4}$$

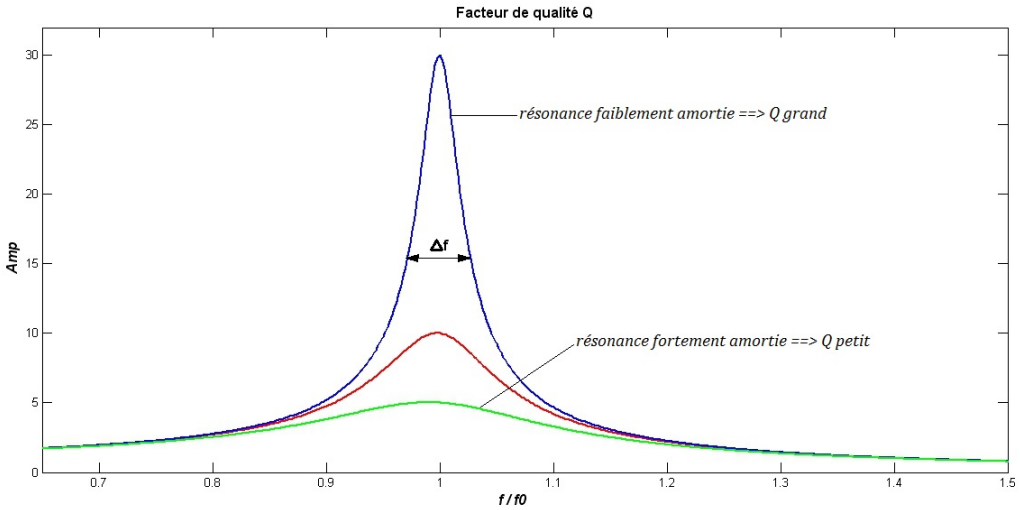

FIGURE 2.4 – Courbe de trois résonances à la même fréquence centrale mais avec un amortissement différent. Au plus Δf (ou $\Delta\ \omega$) est grand, au plus Q est petit.

Pour que la note du loup soit distincte, il faut qu'elle perdure dans le temps, donc que $\Delta f = 1/\Delta t$ soit le plus petit possible. Il en découle qu'à une fréquence propre donnée, plus le facteur de qualité Q est grand, plus le phénomène du loup sera intrusif, a contrario ce phénomène sera plus difficile à produire sur des instruments à facteur de qualité moindre.

Chapitre 3

Modélisation Mécanique

Lorsqu'une corde est pincée, en pizz, et seulement lorsque l'on rencontre le phénomène du loup, la situation est assimilable à un problème de corde fixée en un point et couplée à un oscillateur amorti. La validité du modèle est déterminée par les conditions aux limites, dont le doigt joue un rôle essentiel en modifiant la longueur de la corde en vibration. En étudiant la validité du modèle, on en sortira des conditions sur la position du doigt quant à l'existence d'un loup.

3.1 Modélisation et validité

Ici, notre violoncelle est réduit au modèle simple d'une unique corde de masse m, alignée initialement selon l'axe (Ox), et fixée en un point $x = 0$ par le doigt du musicien qui contrôle sa fréquence de fondamental $f = c/2L$ en jouant sur la longueur de la corde en vibration L. La masse effective du corps qui entre en vibration via le transfert d'énergie par le chevalet est représentée par une masse M, attachée à un ressort élastique de raideur K aux oscillations amorties par un piston de coefficient de viscosité R qui témoigne à la fois de la rigidité du corps et de l'atténuation due pour l'essentiel au rayonnement sonore. Le système masse-ressort-piston est couplé à la corde au point $x = L$.

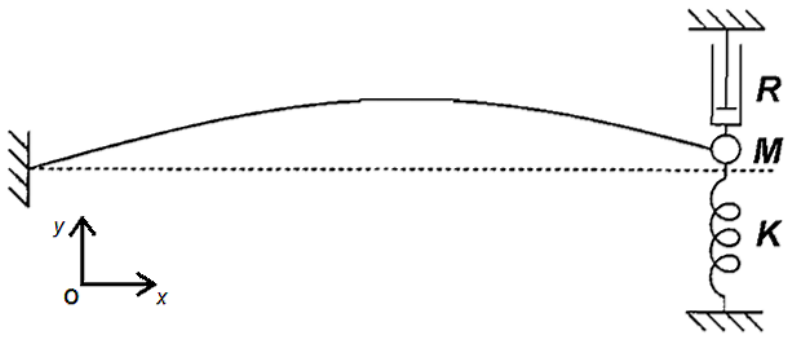

FIGURE 3.1 – Corde couplée à un système masse-ressort amorti

Comme énoncé par D'Alembert en 1747 dans ses Recherches sur les cordes vibrantes, l'équation de propagation d'une onde dans un milieu à une dimension est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

Où $c = \sqrt{T/\mu}$ est la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde, caractérisée par sa tension T et sa masse linéique $\mu = m/L$.

La solution générale de (3.1) est de type :

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \tag{3.2}$$

La condition limite en $x = 0$ nous impose $y(t)|_{x=0} = 0$, la solution devient alors de la forme :

$$y(x,t) = A\sin(kx)e^{i\omega t} \tag{3.3}$$

D'autre part, en négligeant l'amortissement, l'équation du mouvement qui régit la masse M en $x = L$ est :

$$-T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = M\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=L} + Ky(t)|_{x=L} \tag{3.4}$$

En lui injectant la solution (3.3) et en définissant $k_0^2 = \frac{K}{Mc^2}$, on obtient l'équation suivante [1] :

$$\boxed{\cot(kL) = \frac{M}{m}\left(kL - \frac{(k_0L)^2}{kL}\right)} \tag{3.5}$$

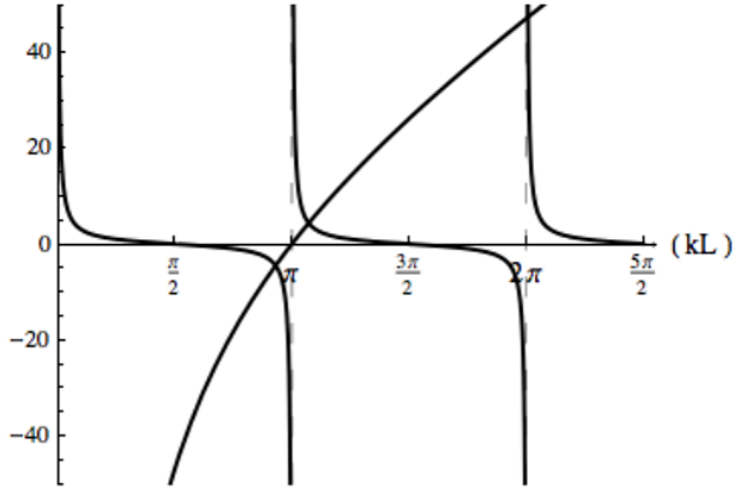

FIGURE 3.2 – Graphe des deux membres de l'équation (3.5). On constate qu'il n'y a égalité des membres qu'en deux valeurs autour de $kL = \pi$: c'est l'étendue spatiale où le corps peut entrer en résonance.[4]

Les solutions graphiques en fig 3.2 nous montrent qu'autour de $kL = \pi$, il y a coïncidence des membres de l'équation (3.5). Ces solutions sont distantes d'une valeur $\epsilon \ll 1$ de $kL = \pi$ telle qu'il y ait battement. La symétrie du problème nous impose $k_0L = \pi$, qui correspond également à la fréquence fondamentale de la corde.

$$\text{En effet, } f_1 = \frac{c}{2L} \rightarrow k_1L = \frac{\omega_1}{c} = \frac{2\pi f_1}{c} = \pi$$

3.2 Couplage idéal

En effectuant une approximation [2] au premier ordre de $\cot(kL)$ autour de la valeur $kL = \pi$, nous cherchons la valeur ϵ telle qu'en $\pi + \epsilon$ et $\pi - \epsilon$ l'équation (3.5), et donc déterminer les positions kL où un loup peut être entendu.

$$\text{On trouve une valeur } \boxed{|\epsilon| = \sqrt{\frac{m}{2M}}}$$

Si nous comparons [3] l'espacement entre les résonances du corps et de la corde (qui est de $\delta k = |\epsilon|$) avec la largeur de bande à mi-hauteur de la fréquence propre du corps Δk, nous pouvons en tirer une condition sur le facteur de qualité Q.

1. Calculs détaillés en annexe A
2. Voir Annexe A
3. Détails des calculs en annexe A, en utilisant (2.4)

$$\begin{cases} \text{"Couplage" } \underline{\text{fort}} & \text{si } \Delta k \ll \delta k \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{Q^2}{2\pi^2} \gg \dfrac{M}{m}} \\ \text{"Couplage" } \underline{\text{faible}} & \text{si } \Delta k \gg \delta k \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{Q^2}{2\pi^2} \ll \dfrac{M}{m}} \end{cases}$$

3.3 Couplage réel

Précédemment, nous avons modélisé le couplage en négligeant l'amortissement dû au rayonnement R (conversion d'énergie en onde sonore). En réalité, il a un impact conséquent sur l'équation (3.4) et sa résolution fait alors appel à des calculs plus approfondis [4].

L'égalité finale sera de type complexe, il faut donc une égalité entre les termes réels d'une part, et imaginaires d'autre part, pour qu'elle reste valide. On aboutit donc à un système de deux équations. La partie réelle de chacun des membres nous renseigne sur les fréquences entendues en fonction de la pulsation normalisée $\Omega = \omega/\omega_0$. La partie imaginaire de chacun des membres nous renseigne sur la largeur de bande de ces fréquences et donc son atténuation. Plus la partie imaginaire est grande, plus il y aura une forte largeur de bande. Ces résultats sont présenté en figure 3.3 qui nous présente les fréquences entendues pour une position de doigt sur la corde et donc une valeur de $f = c/2L$.

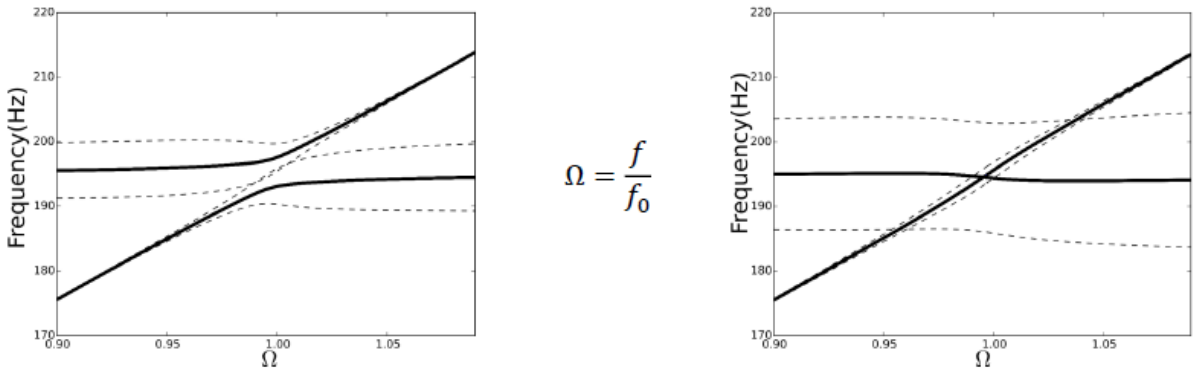

FIGURE 3.3 – Tracé des fréquences entendues pour une fréquence jouée sur la corde, avec en pointillées leurs largeurs de bande associées. (a) Cas du couplage fort. (b) Cas du couplage faible.[1]

Loin de la fréquence du loup, on identifie, pour une valeur de Ω donnée, une courbe avec une largeur de bande très fine, c'est la fréquence de la corde pincée. L'autre courbe, qui présente une largeur de bande plus importante, est la fréquence du corps.

La courbe (a) (couplage fort) met en évidence un phénomène d' "évitement des fréquences" lorsque la pulsation de la corde est proche de la pulsation du corps. Les fréquences centrales ne prennent jamais la même valeur, il est donc impossible d'obtenir une seule fréquence pour faire disparaître le loup.

La courbe (b) (couplage faible) est différente. Cette fois-ci, on peut jouer sur la fréquence du corps sans qu'il y ait un évitement des fréquences, il n'y aura plus battement, le loup ne sera plus perceptible. Qualitativement, on peut l'expliquer par une résonance du corps très large et aplatie, qui s'atténuera très rapidement (on rappelle que Q petit $\rightarrow \Delta f$ grand $\Rightarrow \Delta t$ petit), la fréquence du corps n'aura pas d'impact sur la note jouée.

4. Nous invitons le lecteur à découvrir la résolution d'une modélisation encore plus complète, incluant notamment l'amortissement, dans le livre de Kergomard et Chaigne : Acoustique des instruments de musique, Chap. 6 : Systèmes couplés.

Chapitre 4

Modélisation Électronique

Lorsque l'on frotte avec l'archet la corde, on produit des oscillations forcées. Au niveau de la note du loup, le système (corde ; doigt ; archet ; chevalet) se comporte comme deux circuits électriques en résonance. Les analogies avec l'électronique sont donc applicables ici. L'étude de l'impédance totale du système Z, qui en mécanique témoigne de la résistance du corps au mouvement qui lui est imposé, nous permettra de comprendre pourquoi le phénomène du loup ne peut exister si l'on arrive à jouer à la fréquence propre du corps.

4.1 Transformation système mécanique / système électrique

Dans cette analogie, l'instrument est modélisé par une ligne de transmission. Au lieu d'ondes mécaniques, nous avons du courant électrique circulant le long de la ligne dans un régime stationnaire "imposé" par le loup. Les ondes délivrées par l'archet seront modélisées par un générateur électrique, le doigt posé sur la corde et empêchant donc le passage des ondes par un circuit ouvert (ou une impédance infinie) et enfin la transmission d'énergie au corps par le chevalet sera symbolisée par l'impédance du corps Z_B. L'impédance du circuit sera $Z = V/I$. On appellera par la suite l'impédance caractéristique de la corde $Z_C = \sqrt{T\mu}$.

4.2 Impédance

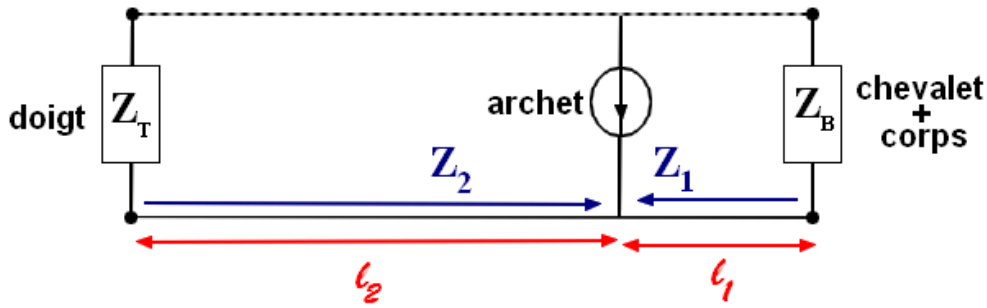

FIGURE 4.1 – Circuit électrique analogue[3]

L'impédance terminale rencontrée sera Z_B pour Z_1 et $Z_T = \infty$ pour Z_2.
On calcule les impédances de ligne de transmission [1] de Z_1 et Z_2 :

$$\begin{cases} Z_1(l_1) = Z_C \frac{Z_B + iZ_C \tan(kl_1)}{Z_C + iZ_B \tan(kl_1)} \\ Z_2(l_2) = -iZ_C \cot(kl_2) \end{cases}$$

L'impédance totale est de la forme $\boxed{Z = Z_1 + Z_2 = R(\omega) + iX(\omega)}$ avec R la partie réelle appelée résistance et X la partie imaginaire appelée réactance.

1. Détails en annexe B

4.3 Existence du loup

Par le biais de notre analogie, on peut analyser les courbes de la partie réelle et imaginaire de l'impédance de la ligne de transmission et raisonner comme on le ferait avec une impédance mécanique $Z_{mec} = F/v$. Le but est de maximiser le module de Z afin qu'il y ait la plus grande réponse possible de la part du corps lors du phénomène du loup.

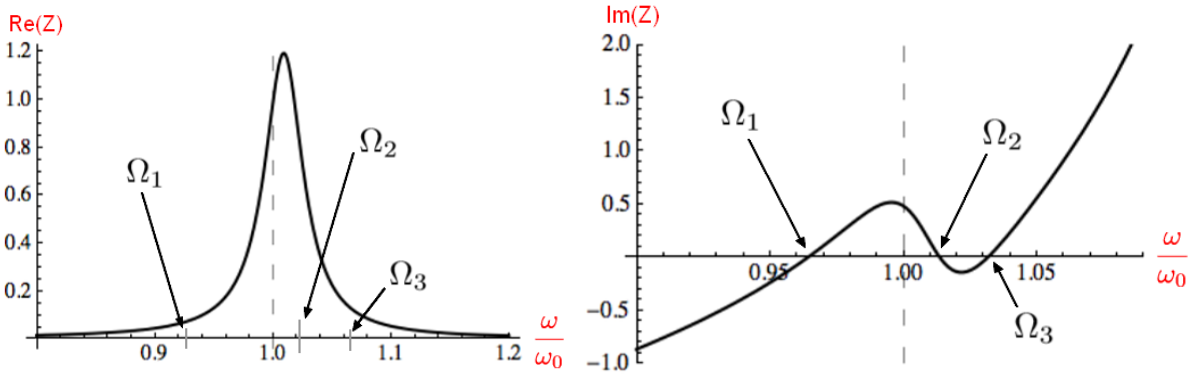

FIGURE 4.2 – Tracé des parties réelle et imaginaire de Z pour $Q = 25$ et $\sqrt{T\mu} \ll \sqrt{KM}$ (couplage fort).[2]

Le module de Z est :

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

On va d'abord chercher où s'annule le déphasage entre la fréquence propre et la fréquence excitée pour maximiser l'impact de la pulsation du corps.

$$arg(Z) = 0 \Rightarrow X(\omega) = 0$$

Sur la courbe 2, il y a trois valeurs de $\Omega = \omega/\omega_0$ pour lesquelles X s'annule. Appelons-les (par ordre croissant de valeur) Ω_1, Ω_2 et Ω_3.

Superposons cette courbe à la courbe 1. Les valeurs Ω_1 et Ω_3 correspondent à des valeurs de R suffisamment petites pour qu'il n'y ait pas trop d'atténuation. Cependant, $R(\Omega)$ présente un pic en Ω_2, il ne peut donc d'avoir de loup en cette valeur. Elle est proche de $\omega = \omega_0$, c'est pourquoi si l'on se rapproche le plus possible de la pulsation du corps, le phénomène du loup ne devrait plus exister.

Par ailleurs, si Q diminue, la courbe de la réactance s'applatie au point de s'annuler qu'une fois en une valeur $\Omega_2' \sim \Omega_2$ et le phénomène du loup disparaît : c'est le couplage faible.

Chapitre 5

"Tuer" le loup

Nous avons au cours des paragraphes précédents énoncé différents paramètres nécessaires à l'apparition du phénomène du loup. De notre étude découle un panel de solutions qui jouent sur ces paramètres, avec leurs avantages et inconvénients.Des analyses expérimentales plus complètes seront délivrées le jour de la soutenance.

5.1 "Accorder" le loup

La fréquence fondamentale du corps associée au mode du loup [1] est :

$$f_0(M) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

Si cette fréquence correspond à une note qui devra être jouée par l'instrumentiste (et donc sujette à l'apparition du loup), on peut changer sa valeur en jouant sur la masse en vibration, qui comprend la masse effective du corps et celle de la corde. En aimantant une masse à la table, on modifie la masse totale M_{tot} en vibration, et de ce fait la valeur de f_0 de façon à ce qu'elle soit comprise entre deux notes jouées. Cela déplace le problème et il n'est pas impossible que le musicien rencontre ce loup sur une autre note, il faut donc un travail de précision de façon à ce que la fréquence du loup soit déplacée entre deux fréquences exécutées par le musicien.

5.2 Absorber les vibrations du corps

À partir de notre "carte des vibrations", on peut en tirer les éléments les plus vibrants de la table. En posant notre doigt sur des endroits clés, on peut absorber grandement la vibration du corps, et donc le phénomène du loup. Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient d'étouffer les sons produits par le violoncelle et ainsi d'avoir une richesse sonore moins grande.

5.3 Changer la polarisation de l'onde transversale

Le phénomène du loup est caractérisé par une dégénérescence du mouvement de Helmholtz en un double glissement. Les accordeurs de type Theunis imposent à la corde sur laquelle ils sont fixés une direction d'oscillation et donc changent le couplage entre la corde et le corps. Ils modifient également la fréquence propre du corps en augmentant la masse totale en vibration.

1. Voir Paragraphe 2.3

Conclusion

La physique des violons est un domaine vaste et varié dans lequel beaucoup de zones d'ombre subsistent. Le mystère des Stradivarius en est un exemple bien connu... Pour celui de la note du loup, moins populaire, les explications scientifique existantes à ce jour font état d'une efficacité notable. Nous avons présenté dans cette étude, deux réductions simplifiées et perfectibles nous permettant tout de même de comprendre les causes du loup, comme le couplage expliqué par le facteur de qualité, ainsi que les différents effets observables tel que la dégénérescence du mouvement de Helmholtz. Une étude plus approfondie serait intéressante notamment par des modélisations numériques plus actuelles et plus complètes, dont pourraient peut-être résulter de nouvelles techniques de fabrication d'instruments de façon à en minimiser le loup.

Cependant la lutherie est un artisanat qui remonte à plusieurs siècles et qui brille par son efficacité encore aujourd'hui ! Les luthiers n'ont pas attendu la physique moderne pour résoudre le problème de la note du loup et ont développé de façon empirique et *à l'oreille !* plusieurs solutions. Nous n'avons évoqué ici que brièvement les différents outils mis en vente sur le marché, qui sont l'objet de notre soutenance.

Remerciements

Nous souhaitons remercier tout particulièrement nos deux encadrants, Valérie Doya et Olivier Legrand, pour nous avoir éclairés de leurs connaissances et lucidité. Merci également à l'ensemble du personnel du LPMC pour leur tolérance (le loup a hurlé longtemps !), aux ingénieurs du laboratoire pour nous avoir prêté, et même fabriqué, des outils nécessaires à nos expériences, et surtout à Denis Declerck, luthier à Nice et assoiffé de savoir, pour nous avoir fourni le violoncelle qui a servi à notre étude. En revanche, nous ne souhaitons pas remercier le loup, car il fut tantôt mesquin, tantôt capricieux et tantôt douloureux ! Mais bon on lui pardonne quand même...

Annexe A : Modélisation Mécanique

Résolution des différents problèmes numériques.

1 Équation d'onde et conditions aux limites

Condition en $x = 0$:

$$y(0,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = 0$$

$$\Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

d'où :

$$y(x,t) = A(e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) = Ae^{i\omega t}(e^{-ikx} - e^{ikx}) = 2iAe^{i\omega t}\sin(kx)$$

$$y(x,t) = A'\sin(kx)e^{i\omega t} \text{ avec } A' = i2A$$

Bilan des forces sur le système :
• Tension de la corde :

$$\overrightarrow{T} = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{e_y} \text{ avec } T\text{constante de tension}$$

• Force de rappel du ressort :

$$\overrightarrow{F_{res}} = -Ky(x,t)\overrightarrow{e_y} \text{ avec } k\text{constante de raideur}$$

• Force de frottement, avec R le coefficient de viscosité associé (cette force est négligée) :

$$\overrightarrow{f} = -R\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\overrightarrow{e_y}$$

2eme loi de Newton projetée sur $\overrightarrow{e_y}$ et appliquée en $x = L$, terminaison couplée entre le chevalet et le corps :

$$\boxed{M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x = L) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(x = L) - Ky(x = L)}$$

On injecte l'expression de y :

$$\begin{cases} y(x,t) = A'\sin(kx)e^{i\omega t} \Rightarrow y(L,t) = A'\sin(kL)e^{i\omega t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = kA'\cos(kx)e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}(x = L) = kA'\cos(kL)e^{i\omega t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x = L) = -\omega^2 A'\sin(kL)e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -TkA'\cos(kL)e^{i\omega t} = -M\omega^2 A'\sin(kL)e^{i\omega t} + KA'\sin(kL)e^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow -Tk\cos(kL) = (-\omega^2 M + K)\sin(kL)$$

$$\Leftrightarrow \cot(kL) = \frac{\omega^2 M - K}{Tk}$$

Avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $k = \omega/c$, $m = \mu L$, $k_0^2 = \frac{K}{c^2 M}$,

$$\frac{\omega^2 M - K}{Tk} = \frac{c^2 kM}{T} - \frac{K}{Tk} = \frac{M}{m}\left(\frac{kLm}{\mu L} - \frac{K}{M}\frac{mL}{\mu c^2 Lk}\right) = \frac{M}{m}\left(kL - \frac{k_0^2 L^2}{kL}\right)$$

$$\text{d'où : } \boxed{\cot(kL) = \frac{M}{m}\left(kL - \frac{(k_0 L)^2}{kL}\right)}$$

2 Calcul de ϵ

$$\cot(kL) = \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} \underset{\pi}{\overset{DL_1}{\sim}} \frac{\cos(\pi) - \sin(\pi)(kL-\pi)}{\sin(\pi) + \cos(\pi)(kL-\pi)} \sim= \frac{1}{kL-\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot(kL) \sim \frac{1}{kL-\pi}}$$

$$\Rightarrow \cot(kL) = \frac{M}{m}\left(kL - \frac{(k_0 L)^2}{kL}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{kL-\pi} = \frac{M}{m}\left(kL - \frac{(k_0 L)^2}{kL}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} kL = \pi + \epsilon \\ k_0 L = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} = \frac{M}{m}\left((\pi+\epsilon) - \frac{(\pi)^2}{\pi+\epsilon}\right)$$

Le terme $\frac{\pi^2}{\pi+\epsilon}$ peut se simplifier grâce à un DL :

$$\frac{\pi^2}{\pi+\epsilon} = \frac{\pi}{1+\frac{\epsilon}{\pi}} = \pi\left(1+\frac{\epsilon}{\pi}\right)^{-1} \underset{\epsilon \ll \pi}{\sim} \pi\left(1-\frac{\epsilon}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon} = \frac{M}{m}\left[(\pi+\epsilon) - \pi\left(1-\frac{\epsilon}{\pi}\right)\right] = 2\epsilon\frac{M}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{M} = 2\epsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|\epsilon| = \sqrt{\frac{m}{2M}}}$$

3 Couplage idéal

Couplage faible si $\Delta k \gg \delta k$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta k}{k_0} \gg \frac{\delta k}{k_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta k}{k_0} \gg \frac{\delta k L}{k_0 L} = \frac{\epsilon}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Q} \gg \sqrt{\frac{m}{2M}}\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q^2} \gg \frac{m}{2M}\frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{soit : } \boxed{\frac{Q^2}{2\pi^2} \ll \frac{M}{m}}$$

De même, on a un couplage fort si $\Delta k \ll \delta k \Leftrightarrow \boxed{\frac{Q^2}{2\pi^2} \gg \frac{M}{m}}$

Annexe B : Modélisation Électronique

1 Impédance d'entrée

On veut ici définir l'impédance d'une ligne de transmission en fonction des différents éléments du système : l'impédance caractéristique du système Z_C et l'impédance vue en bout de ligne Z_L.

$$\begin{cases} V_{tot}(x) = V_1 e^{ikx} + V_2 e^{-ikx} \\ I_{tot}(x) = \frac{1}{Z_C}(I_1 e^{ikx} + I_2 e^{-ikx}) = \frac{1}{Z_C}(V_1 e^{ikx} - V_2 e^{-ikx}) \end{cases}$$

L'impédance d'entrée est le rapport des amplitudes entre une onde de 1V et son onde de courant.

$$Z = \frac{V}{I} = Z_C \frac{V_1 e^{ikx} + V_2 e^{-ikx}}{V_1 e^{ikx} - V_2 e^{-ikx}}$$

$$= Z_C \frac{1 + \frac{V_2 e^{-kx}}{V_1 e^{kx}}}{1 - \frac{V_2 e^{-kx}}{V_1 e^{kx}}}$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{Z(x)}{Z_C} = \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}, \text{ en définissant } \Gamma(x) = \frac{V_2}{V_1} e^{-2kx} \text{ l'abaque de Smith}$$

$$\text{Ainsi, } \Gamma(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1}$$

En bout de ligne,

$$\Gamma(0) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

On injecte dans l'équation :

$$\Rightarrow z(x) = \frac{z_L + \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}{1 + z_L \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}$$

$$\text{et } i \tan(x) = \tanh(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\text{d'où } \boxed{Z(x) = z(x) Z_C = Z_C \frac{Z_L + i Z_C \tan(kx)}{Z_C + i Z_L \tan(kx)}}$$

2 Application au circuit équivalent

Pour Z_1, $Z_L \equiv Z_B$.

$$\boxed{Z_1(kl_1) = Z_C \frac{Z_B + i Z_C \tan(kl_1)}{Z_C + i Z_B \tan(kl_1)}}$$

Pour Z_2, on est en circuit ouvert, donc $Z_L = Z_T = \infty$.
d'où

$$\boxed{Z_2(kl_2) \approx Z_C \frac{Z_L}{i Z_L \tan(kl_2)} = -i Z_C \cot(kl_2)}$$

Références

[1] Thibault Bondaz. La note du loup. *Publication interne*, 2015.

[2] Vasilij Centrih. Violin and the wolf, 2011.

[3] Inspiré de John Schelleng. The violin as a circuit, 1962.

[4] Klaus Roth. Chemical secrets of the violin virtuosi. `http://www.chemistryviews.org/details/ezine/2085627/Chemical_Secrets_of_the_Violin_Virtuosi__Part_3.html`, 2012.

[5] Stefania Serafin. Impact of string stiffness on virtual bowed strings. `https://ccrma.stanford.edu/~jos/stiffbowed/What_does_playability_mean.html`, 2014.