



UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
PROJET TUTEURÉ DE LICENCE DE PHYSIQUE

ANNÉE 2017

Synchronisation de deux métronomes couplés

Auteurs :

Adelyne BERARD
Guillaume GIOMBINI

Encadrants :

Matthieu BELLEC
Frédéric BLANC

Projet réalisé à l' *INΦNI*

24 mai 2017

Sommaire

1	Introduction	1
2	Rappel sur l'oscillateur de Van Der Pol	1
3	Étude de deux métronomes couplés	3
3.1	Équations du mouvement	3
3.2	Adimensionnement des équations	4
3.3	Résolution analytique par la méthode de développement multi-échelle	4
3.4	Solutions stationnaires	6
4	Modélisation numérique	8
5	Conclusion	10

1 Introduction

La synchronisation est le processus où plusieurs systèmes interagissent pour aboutir à un mouvement commun. Elle apparaît notamment entre plusieurs oscillateurs. La synchronisation est différente de la résonance qui caractérise la réponse d'un oscillateur à un signal périodique extérieur. La synchronisation est un thème fondamental dans l'étude des phénomènes non linéaires. On retrouve ce processus dans de nombreux domaines allant de la physique fondamentale à la psychologie, en passant par la biologie. On peut citer par exemple les cellules d'un coeur qui se contractent simultanément, des lucioles au Tennessee qui émettent leur lumière de façon synchrone ou encore les applaudissements à l'unissons dans une salle de spectacle [?].

Huygens fut le premier à rendre compte de ce phénomène en 1657. Il essayait alors de développer un dispositif dans le but de régler le problème de la longitude qui se posait à l'époque. Pour cela, il fallait que les horloges à bord des navires n'accusent pas de retard sur toute la durée de l'expédition. Huygens essaya de mettre au point un dispositif de deux horloges composées de pendules, posées sur une même planche de bois. Il observa alors que les deux pendules oscillaient à la même fréquence mais en opposition de phase. Il remarqua qu'il était difficile de briser cette synchronisation. En effet, il perturba le système et celui-ci revint dans cet état d'opposition de phase en à peine une demi-heure [?].

Un métronome possède un mécanisme interne d'horlogerie se composant entre autres d'un ressort que l'on remonte manuellement. Il permet d'entretenir les oscillations et de battre à un rythme régulier. La fréquence des battements est ajustable au moyen d'une masse placée sur le bras du pendule. Plus on l'éloigne du pivot, plus la fréquence diminue. La description de ces oscillations peut se faire au moyen de l'oscillateur de Van der Pol que l'on étudiera en préambule.

Le cas étudié sera similaire à l'expérience de Huygens. Les deux horloges seront remplacées par des métronomes qui reposeront sur une planche légère, elle-même posée sur deux canettes de soda vides. Ce système a plusieurs avantages : il est facile à mettre en place et on a directement accès à une information sur son état de façon visuelle, simplement en l'observant, mais aussi de façon sonore grâce aux sons produits par les métronomes à chaque oscillation.

Tout le problème de l'étude menée ici sera de déterminer ce qui pousse le système à privilégier un état plutôt qu'un autre - synchronisé ou non, en phase ou en opposition- en fonction des fréquences d'oscillations propres de chacun des oscillateurs et des conditions initiales imposées aux métronomes.

2 Rappel sur l'oscillateur de Van Der Pol

Un métronome agit comme un oscillateur. Considérons le cas de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

Si nous utilisons ce modèle pour le décrire, nous nous heurtons à deux problèmes d'invariance :

- l'invariance par renversement du temps
- l'invariance par dilatation d'échelle

Premièrement, si l'on change t en $(-t)$ dans l'équation (1), les solutions du problème sont inchangées. Le phénomène est alors décrit comme réversible. Or, on sait par l'observation que c'est impossible. L'oscillateur finira par s'arrêter sous l'effet d'amortissements.

Deuxièmement, $\alpha x(t)$, avec α un réel quelconque, est aussi solution de l'équation (1). Ici, on n'a donc pas d'amplitude propre au système, ce qui n'est pas en accord avec le mouvement d'un pendule de métronome qui est sensé battre à amplitudes régulières et définies, indépendantes des conditions initiales. Afin d'éviter la réversibilité du phénomène, on introduit un terme de frottement visqueux $-\gamma dx/dt$ avec γ un réel quelconque. l'équation (1) devient alors :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

Étudions la variation d'énergie du système. En multipliant l'équation (2) par $m\dot{x}$ on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\gamma\dot{x}^2 + m\omega^2\dot{x}x = 0 \quad (3)$$

qui peut se réécrire :

$$\frac{d}{dt} \left(m\frac{\dot{x}}{2} + m\omega^2\frac{x^2}{2} \right) = -m\gamma\dot{x}^2 \quad (4)$$

où $m\frac{\dot{x}}{2}$ est l'énergie cinétique et $m\omega^2\frac{x^2}{2}$ l'énergie potentielle. La variation d'énergie n'étant pas nulle, on est bien en présence d'un système non conservatif.

On note que selon le signe de gamma, l'énergie totale du système évolue différemment :

- Si $\gamma > 0$, l'énergie du système décroît jusqu'à être totalement dissipée.
- Si $\gamma < 0$, l'énergie augmente indéfiniment.

Dans le deuxième cas, la croissance infinie de l'énergie ne permet pas de définir un système physique réel. Le premier cas, en revanche, rend compte de l'oscillateur amorti. On peut aisément vérifier que si $\gamma = 0$, on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. On a donc réglé le problème de la réversibilité temporelle. Cependant, il subsiste l'invariance par dilatation. Celle-ci vient du fait que les équations (1) et (2) sont linéaires. Il faut donc briser cette linéarité. On a vu que le signe de γ influe sur la variation d'énergie du système. Or, si l'on veut entretenir les oscillations, il faut que ce signe s'inverse au cours du temps. En effet, on veut augmenter l'amplitude lorsque celle-ci est trop faible, et la diminuer lorsqu'elle est trop élevée. Pour l'augmenter, on fournit de l'énergie au système, c'est-à-dire que le coefficient γ est négatif. Dans le cas contraire, il est positif. On peut alors modifier ce coefficient de cette façon :

$$\gamma = \epsilon \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

et l'équation (2) devient :

$$\ddot{x} - \epsilon \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

qui caractérise un oscillateur de Van der Pol [?].

On peut alors accéder au portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour l'équation (5) par le biais de simulations numériques [?]. Le terme x_0 prendra la valeur arbitraire de 1.

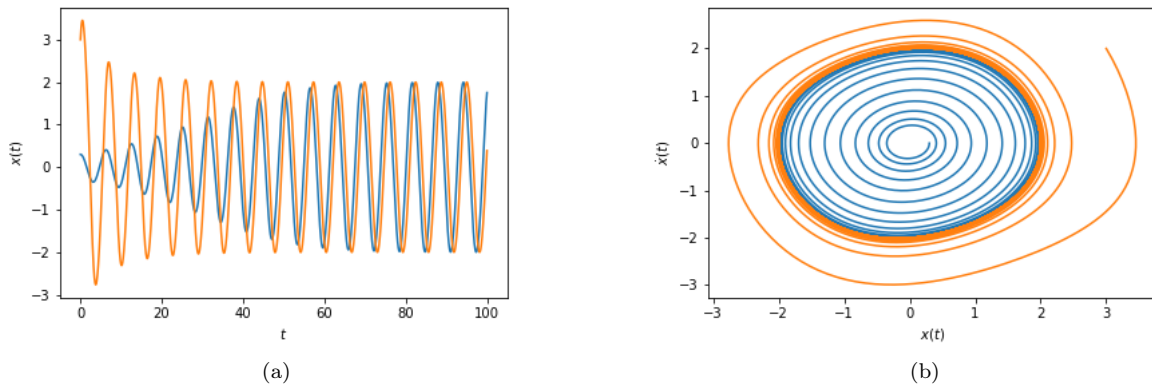


FIGURE 1 – Amplitudes (a) et portraits de phase (b) du Van der Pol en fonction du temps pour deux conditions initiales et $\epsilon=0.1$

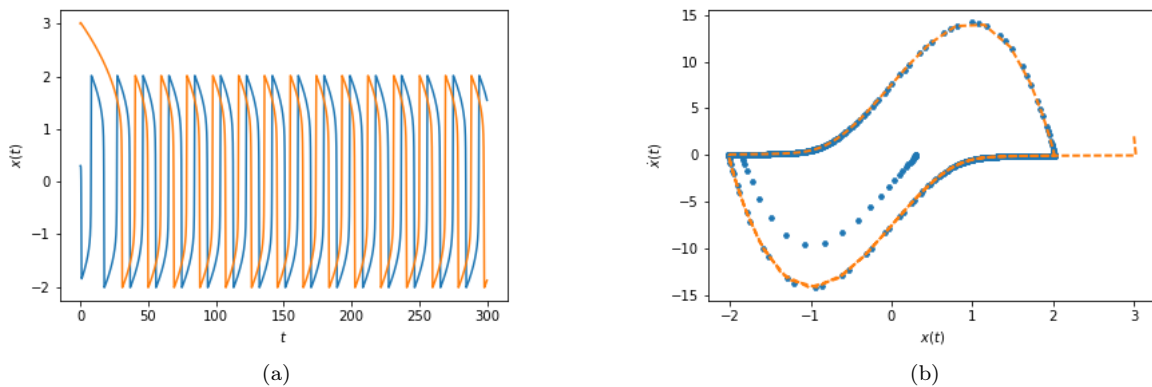


FIGURE 2 – Amplitudes (a) et portraits de phase (b) du Van der Pol en fonction du temps pour deux conditions initiales et $\epsilon = 10$

Il est important de noter que la trajectoire dans l'espace de phase de chaque configuration tend à dessiner une courbe fermée, ce qui est caractéristique d'oscillations entretenues. On parle alors de cycle limite.

Pour différentes conditions initiales mais pour un même ϵ , nous observons que les trajectoires dans l'espace de phase tendent vers le même cycle limite. Le cycle limite de l'oscillateur de Van der Pol est donc insensible aux conditions initiales (figures 1 et 2).

En revanche, le terme ϵ a une influence importante :

- Si $\epsilon \ll 1$, le cycle limite tend vers une ellipse car le système est quasiment linéaire (figure 1).
- Si $\epsilon \gg 1$, le cycle limite est totalement déformé (2).

La valeur $\epsilon = 1$ quant à elle, correspond à un régime de transition.

Ainsi, le cycle limite est d'autant plus déformé que ϵ est grand, c'est-à-dire que la non-linéarité du système est importante.

Autres points importants, le cycle limite implique une périodicité des oscillations ainsi qu'une amplitude déterminée. On peut le vérifier sur les figures 1(a) et 2(a) et ajouter que les amplitudes sont bornées par la même valeur dans chaque cas : $x = 2$.

3 Étude de deux métronomes couplés

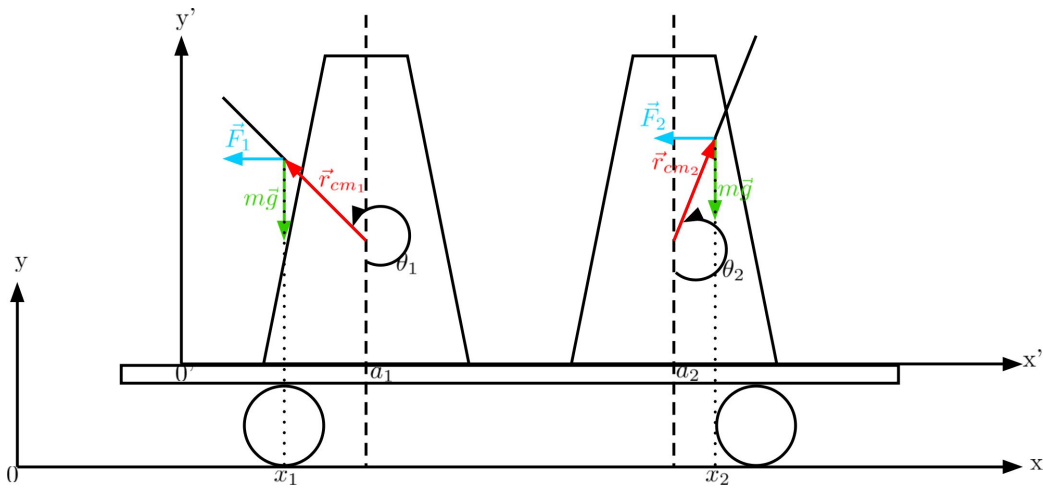


FIGURE 3 – Deux métronomes couplés par une planche reposant sur deux canettes

3.1 Équations du mouvement

Considérons des métronomes, possédant la même masse et la même inertie, reposant sur une planche libre de se mouvoir horizontalement sans frottement. Celle-ci se déplace en suivant le rythme des oscillations des métronomes. Ce système étant pseudo-isolé, son centre de masse est immobile dans le référentiel de la terre. Dans le référentiel non galiléen de la planche, chacun des métronomes subit une force inertielle \vec{F}_i en plus de son poids $m\vec{g}$ et de la force de rappel non linéaire du Van Der Pol (figure 3).

Notons x la position de la planche et r_{cm_i} la distance entre le pivot et la masse du pendule de chaque métronome.

Exprimons les moments des forces :

$$\vec{\Gamma}_{m\vec{g}} = \vec{r}_{cm_i} \wedge m\vec{g} = -r_{cm_i} mg \sin \theta_i \hat{z}' \quad (6)$$

$$\vec{\Gamma}_{\vec{F}_i} = \vec{r}_{cm_i} \wedge \vec{F}_i = -mr_{cm_i} \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta_i \hat{z}' \quad (7)$$

La théorème du moment cinétique permet donc d'obtenir l'équation :

$$I \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = -r_{cm_i} mg \sin \theta_i - mr_{cm_i} \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta_i \quad (8)$$

où I est le moment d'inertie du pendule des métronomes, θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale ($\theta = \pi$ lorsqu'il est au repos), m la masse du pendule et g l'accélération de pesanteur .

D'où

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + \frac{r_{cm_i} mg}{I} \sin \theta_i + \frac{mr_{cm_i}}{I} \cos \theta_i \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (9)$$

En tenant compte du terme de Van Der Pol, on obtient l'équation :

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + \omega_i^2 \sin \theta_i + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_i}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_i}{dt} + \left(\frac{r_{cm_i} m \cos \theta_i}{I} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (10)$$

avec $\omega_i^2 = \frac{mr_{cm_i}g}{I}$ la fréquence propre de l'oscillateur linéaire.

La position horizontale du centre de masse du système est :

$$x_{cm} = \frac{Mx + mx_1 + mx_2}{M + 2m} \quad (11)$$

avec $x_i = x + a_i + r_{cm_i} \sin \theta_i$ et M la masse de la planche.

Posons $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ la pulsation moyenne du système. En supposant que les $\omega_i \approx \omega$ alors :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{\omega + \Delta\omega_1}{\omega} \right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta\omega_1}{\omega} \right)^2 \approx 1 + 2\frac{\Delta\omega_1}{\omega} = 1 + \Delta \quad (12)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{\omega + \Delta\omega_2}{\omega} \right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega} \right)^2 \approx 1 + 2\frac{\Delta\omega_2}{\omega} = 1 - \Delta \quad (13)$$

où Δ , considéré petit dans ce problème, est le désaccord en pulsation des métronomes [?].

On considère donc que les positions r_{cm_i} seront proches l'une de l'autre et égales à leur valeur moyenne :

$$r_{cm} = \frac{r_{cm_1} + r_{cm_2}}{2}$$

Le système est pseudo-isolé donc $\ddot{x}_{cm} = 0$. On en déduit que $\dot{x}_{cm} = \text{constante}$. Comme la vitesse initiale est nulle, $\dot{x}_{cm} = 0$, par conséquent $x_{cm} = \text{constante}$. On place l'origine du repère (Oxy) en x_{cm} et celle du repère (O'x'y') tel que $a_1 = -a_2$.

L'équation (11) devient :

$$x = -\frac{m}{M + 2m} r_{cm} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (14)$$

Les équations du mouvement dans le référentiel de la planche sont donc :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_1^2 \sin \theta_1 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_1}{dt} - \left(\frac{r_{cm} m \cos \theta_1}{I} \right) \left(\frac{mr_{cm}}{M + 2m} \right) \frac{d^2(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{dt^2} = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_2^2 \sin \theta_2 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_2}{dt} - \left(\frac{r_{cm} m \cos \theta_2}{I} \right) \left(\frac{mr_{cm}}{M + 2m} \right) \frac{d^2(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{dt^2} = 0 \quad (15b)$$

3.2 Adimensionnement des équations

Afin d'adimensionner les équations (15a) et (15b), on pose :

- $\tau = \omega t$
- le terme de couplage des masses $\beta = \left(\frac{mr_{cm}}{M + 2m} \right) \left(\frac{mr_{cm}}{I} \right)$
- $\mu = \frac{\epsilon}{\omega}$

Les équations couplées adimensionnées pour deux métronomes sont donc :

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + (1 + \Delta) \sin \theta_1 + \mu \left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_1}{d\tau} - \beta \cos \theta_1 \frac{d^2(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{d\tau^2} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + (1 - \Delta) \sin \theta_2 + \mu \left(\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_2}{d\tau} - \beta \cos \theta_2 \frac{d^2(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{d\tau^2} = 0 \quad (16b)$$

3.3 Résolution analytique par la méthode de développement multi-échelle

Les solutions des équations (16a) et (16b) pour $\beta, \Delta, \mu = 0$ sont dans l'approximation des petits angles :

$$\theta_1 = A\theta_0 \cos(\tau + \phi) \quad (17a)$$

$$\theta_2 = B\theta_0 \cos(\tau + \xi) \quad (17b)$$

Lorsque ces paramètres sont non nuls mais petit, A , B , ϕ et ξ deviennent des fonctions lentement variables du temps. Afin d'étudier ces solutions, nous utilisons la "méthode d'analyse multi échelle" aussi appelée "méthode des amplitudes lentement variables" [?].

On utilise par la suite la notation complexe suivante :

$$\theta_1 = ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\tau} \quad (18a)$$

$$\theta_2 = be^{i\tau} + \bar{b}e^{-i\tau} \quad (18b)$$

avec $a = \frac{A\theta_0}{2}e^{i\phi}$; $\bar{a} = \frac{A\theta_0}{2}e^{-i\phi}$; $b = \frac{B\theta_0}{2}e^{i\xi}$; $\bar{b} = \frac{B\theta_0}{2}e^{-i\xi}$. On a donc :

$$\dot{\theta}_1 = (\dot{a} + ia)e^{i\tau} + (\dot{\bar{a}} - i\bar{a})e^{-i\tau} \quad (19a)$$

$$\dot{\theta}_2 = (\dot{b} + ib)e^{i\tau} + (\dot{\bar{b}} - i\bar{b})e^{-i\tau} \quad (19b)$$

$$\ddot{\theta}_1 = (\ddot{a} + 2i\dot{a} - a)e^{i\tau} + (\ddot{\bar{a}} - 2i\dot{\bar{a}} - \bar{a})e^{-i\tau} \quad (20a)$$

$$\ddot{\theta}_2 = (\ddot{b} + 2i\dot{b} - b)e^{i\tau} + (\ddot{\bar{b}} - 2i\dot{\bar{b}} - \bar{b})e^{-i\tau} \quad (20b)$$

On développe jusqu'au troisième ordre les termes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ dans les équations(16a) et (16b). On a donc $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Les équations (16a) et (16b) deviennent :

$$\ddot{\theta}_1 + (1 + \Delta) \left(\theta_1 - \frac{\theta_1^3}{6} \right) + \mu \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \dot{\theta}_1 - \beta \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\theta_1 - \frac{\theta_1^3}{6} + \theta_2 - \frac{\theta_2^3}{6} \right) = 0 \quad (21a)$$

$$\ddot{\theta}_2 + (1 - \Delta) \left(\theta_2 - \frac{\theta_2^3}{6} \right) + \mu \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \dot{\theta}_2 - \beta \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2} \right) \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\theta_1 - \frac{\theta_1^3}{6} + \theta_2 - \frac{\theta_2^3}{6} \right) = 0 \quad (21b)$$

On substitue les expressions complexes aux θ_i . a et b étant lentement variables, les termes \ddot{a} et \ddot{b} seront négligés ($\ddot{a} \ll \dot{a} \ll a$). L'équation (21a) se réécrit ainsi :

$$\begin{aligned} & (2i\dot{a} - a)e^{i\tau} + (1 + \Delta) \left(a - \frac{1}{2}(a^2\bar{a}) \right) e^{i\tau} + \mu \left[\frac{a^2e^{2i\tau} + 2a\bar{a} + \bar{a}^2e^{-2i\tau}}{\theta_0^2} - 1 \right] [(\dot{a} + ia)e^{i\tau} + (\dot{\bar{a}} - i\bar{a})e^{-i\tau}] - \\ & - \beta \left[1 - \frac{(a^2e^{2i\tau} + 2a\bar{a} + \bar{a}^2e^{-2i\tau})}{2} \right] \left[(2i\dot{a} - a)e^{i\tau} + (-2i\dot{\bar{a}} - \bar{a})e^{-i\tau} + (2i\dot{b} - b)e^{i\tau} + (-2i\dot{\bar{b}} - \bar{b})e^{-i\tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (22a)$$

Pour éviter termes séculaires dans notre solution, il est impératif que la somme des coefficients des $e^{\pm i\tau}$ soit nulle [?]. Après développement des produits et en ne conservant que les termes en $e^{\pm i\tau}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & (2i\dot{a} - a) + (1 + \Delta) \left(a - \frac{1}{2}(a^2\bar{a}) \right) + \mu \left[\frac{(a^2\dot{a} + ia^2\bar{a} + 2a\bar{a}\dot{a} + \bar{a}^2\dot{a} + i\bar{a}^2a)}{\theta_0^2} - (\dot{a} + ia) \right] - \\ & - \beta \left[(2i\dot{a} - a) + (2i\dot{b} - b) - \frac{a^2(-2i\dot{\bar{b}} - \bar{b})}{2} + a\bar{a} \left((2i\dot{a} - a) + (2i\dot{b} - b) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (23a)$$

On néglige ici les termes $\mu\dot{a}$, $\beta\dot{a}$ et $\beta\dot{b}$ qui sont faibles devant μa ou βa et βb , puis on explicite a et b :

$$\begin{aligned} & 2i(\dot{A} + i\dot{\phi}A)e^{i\phi} - \frac{1}{2} \frac{A^3\theta_0^3e^{i\phi}}{8} + \Delta \left(\frac{A\theta_0e^{i\phi}}{2} - \frac{1}{2} \frac{A^3\theta_0^3e^{i\phi}}{8} \right) e^{i\phi} + \mu \left[\left(-i \frac{A^3\theta_0e^{i\phi}}{8} + 2i \frac{A^3\theta_0e^{i\phi}}{8} - i \frac{A\theta_0e^{i\phi}}{2} \right) \right] - \\ & - \beta \left[-\frac{A\theta_0e^{i\phi}}{2} - \frac{B\theta_0e^{i\xi}}{2} + \frac{A^2B\theta_0^3e^{2i\phi}e^{-i\xi}}{8} - \frac{A^3\theta_0^3e^{i\phi}}{8} - \frac{A^2B\theta_0^3e^{2i\phi}e^{i\xi}}{8} \right] = 0 \end{aligned} \quad (24a)$$

En considérant θ_0^2 petit, on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à $\beta\theta_0^2$ et $\Delta\theta_0^2$. L'écriture étant complexe, les parties réelle et imaginaire doivent être nulle toutes les deux. En ne conservant que la partie imaginaire, on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \mu \left[-\frac{A^3}{8} + \frac{A}{2} \right] + \beta \frac{B}{2} \sin(\phi - \xi) \\ \dot{B} &= \mu \left[-\frac{B^3}{8} + \frac{B}{2} \right] - \beta \frac{A}{2} \sin(\phi - \xi) \end{aligned}$$

que l'on peut exprimer, avec $\psi = \phi - \xi$, sous la forme :

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{8} [\mu A(4 - A^2) + 4\beta B \sin(\psi)] \quad (25)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{8} [\mu B(4 - B^2) - 4\beta A \sin(\psi)] \quad (26)$$

En conservant uniquement la partie réelle de l'équation (24a) factorisée par $\frac{e^{i\phi}}{A}$ et en faisant de même avec l'équation en fonction de B, on obtient :

$$-\dot{\phi} + \frac{\Delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta B}{2A} \cos \psi - \frac{3}{8} \frac{A^2 \theta_0^2}{6} = 0 \quad (27a)$$

$$-\dot{\xi} - \frac{\Delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta A}{2B} \cos \psi - \frac{3}{8} \frac{B^2 \theta_0^2}{6} = 0 \quad (27b)$$

En posant $\gamma = \frac{\theta_0^2}{6}$, on obtient :

$$-\dot{\phi} + \frac{\Delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta B}{2A} \cos \psi - \frac{3}{8} \gamma A^2 = 0 \quad (28a)$$

$$-\dot{\xi} - \frac{\Delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta A}{2B} \cos \psi - \frac{3}{8} \gamma B^2 = 0 \quad (28b)$$

On cherche à obtenir la vitesse de déphasage $\dot{\psi} = \dot{\phi} - \dot{\xi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \Delta + \frac{\beta}{2} \left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B} \right) \cos \psi - \frac{3\gamma}{8} (A^2 - B^2) \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{8} \left(8\Delta + 4\beta \left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B} \right) \cos \psi - 3\gamma (A^2 - B^2) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Les équations (25), (26) et (29) donnent l'évolution temporelle du système, cherchons maintenant les solutions stationnaires si elles existe.

3.4 Solutions stationnaires

On définit les variables suivantes [?] :

$$r = \frac{A^2 + B^2}{4} \quad (30a)$$

$$s = \frac{B}{A} - \frac{A}{B} \quad (30b)$$

Les équations (25), (26) et (29) se récrivent sous la forme :

$$\frac{dr}{d\tau} = \mu r \left[1 - \left(\frac{s^2 + 2}{s^2 + 4} \right) r \right] \quad (31a)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{1}{2} [\mu s r + \beta (s^2 + 4) \sin \psi] \quad (31b)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3\gamma r}{\sqrt{s^2 + 4}} + \beta \cos \psi \right) s + 2\Delta \right] \quad (31c)$$

Notons r^* (resp. s^*) les solutions stationnaires de r (resp. s). $\frac{dr}{d\tau}$ s'annule pour $r = 0$ ou $r = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 2}$. Si on considère A et B différents de 0 initialement, alors r ne s'annule pas.

On obtient donc

$$r^* = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 2} \quad (32)$$

Ainsi, l'équation (31b) devient :

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left[\mu s \left(\frac{s^2 + 4}{s^2 + 2} \right) + \beta (s^2 + 4) \sin \psi \right] \quad (33)$$

que nous considérons nulle afin de déterminer les points fixes de s .

$$\mu s \left(\frac{s^2 + 4}{s^2 + 2} \right) + \beta(s^2 + 4) \sin \psi = 0 \quad (34)$$

En factorisant par $s^2 + 4$, on obtient immédiatement une solution imaginaire non pertinente, s étant un réel. L'équation (34) devient alors :

$$\mu s + \beta(s^2 + 2) \sin \psi = 0 \quad (35)$$

On trouve alors deux solutions, une stable et une instable. La solution stable est :

$$s^* = \frac{\mu}{2\beta \sin \psi} \left[-1 + \sqrt{1 - 2(2\beta \sin \psi / \mu)^2} \right] \quad (36)$$

Cette solution n'existe que si $\sqrt{1 - 2(2\beta \sin \psi / \mu)^2}$ est réel, c'est-à-dire pour :

$$2(2\beta \sin \psi / \mu)^2 < 1 \quad (37)$$

On peut substituer cette valeur du point fixe dans l'équation (31c) :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[\left(3\gamma \frac{\sqrt{s^{*2} + 4}}{s^{*2} + 2} + \beta \cos \psi \right) s^* + 2\Delta \right] \quad (38)$$

Après observation qualitative de notre système, on remarque que lorsque les métronomes ont des fréquences trop éloignées l'une de l'autre, ils ne se synchronisent pas. On peut donc considérer que pour Δ petit, la différence de phase ψ est petite. Il en va de même pour $\sin \psi$ et le point fixe s^* devient :

$$s^* \approx -\frac{2\beta}{\mu} \sin \psi \quad (39)$$

Dans cette approximation l'équation d'évolution de ψ (38) devient :

$$\frac{d\psi}{d\tau} \approx \Delta - (3\gamma + \beta) \frac{\beta}{\mu} \sin \psi \quad (40)$$

Nous cherchons ψ^* le point fixe de ψ pour $\frac{d\psi}{d\tau} = 0$. Nous arrivons à :

$$\psi^* \approx \arcsin \left(\frac{\mu\Delta}{\beta(3\gamma + \beta)} \right) \quad (41)$$

Nous pouvons voir ici que le déphasage n'est pas nul mais constant et qu'il est régi par le terme de couplage β , le paramètre de Van der Pol μ et Δ le désaccord en fréquence des deux métronomes. Si $\Delta > \frac{\beta(3\gamma + \beta)}{\mu}$,

$\arcsin \left(\frac{\mu\Delta}{\beta(3\gamma + \beta)} \right)$ n'est plus défini et le point fixe de l'équation (41) n'est plus valable. Dans ces conditions,

s^* ne peut plus être approximé à $-\frac{2\beta}{\mu} \sin \psi$.

En substituant ψ^* dans l'équation (37), on obtient la condition suivante afin d'assurer la synchronisation :

$$|\Delta| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} (3\gamma + \beta) \quad (42)$$

Cette condition est indépendante de μ le coefficient de Van Der Pol et dépend essentiellement du terme de couplage β .

Nous chercherons par la suite à caractériser ce critère de synchronisation par la modélisation numérique puis expérimentalement.

4 Modélisation numérique

Après avoir mené l'étude analytique de l'évolution du système de deux métronomes couplés, nous le modélisons numériquement en utilisant le solveur odeint [?]. Les résultats préliminaires sont exposés ici.

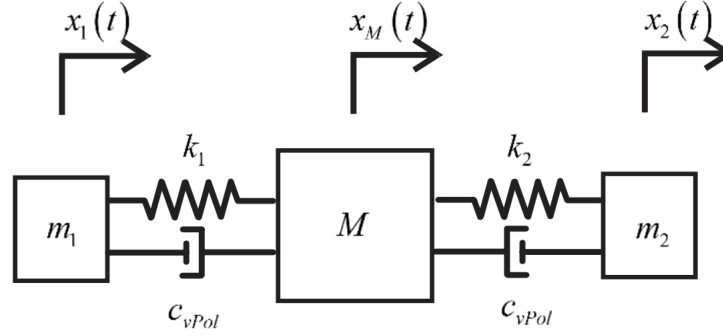


FIGURE 4 – Système simplifié de deux métronomes couplés linéairement par des ressorts et non-linéairement par un oscillateur de Van Der Pol [?]

Nous allons nous intéresser à un modèle simplifié de deux métronomes couplés. Pour cela, nous considérons que les masses des métronomes m_1 et m_2 et de la planche M sont des masses ponctuelles et couplées linéairement par des ressorts, avec pour constantes de raideur k_1 et k_2 , et non-linéairement par un terme de Van der Pol [?]. Notre système équivaut donc à regarder uniquement le mouvement horizontal des masses des métronomes et de la planche. Nous traiterons ce système numériquement afin de retrouver le phénomène de synchronisation et de souligner l'importance du terme non-linéaire.

Par la suite, nous prendrons $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$.

Dans un premier temps, nous étudierons ce système sans le terme de couplage non-linéaire.

Ce système est représenté par les équations :

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_M \quad (43a)$$

$$M\ddot{x}_M = kx_1 - 2kx_M + kx_2 \quad (43b)$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_M - kx_2 \quad (43c)$$

On définit le vecteur :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_M \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Notre système se réécrit ainsi :

$$\ddot{\vec{X}} = A\vec{X} \quad (45)$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} -\omega_n^2 & \omega_n^2 & 0 \\ \sigma\omega_n^2 & -2\sigma\omega_n^2 & \sigma\omega_n^2 \\ 0 & \omega_n^2 & -\omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

où $\sigma = \frac{m}{M}$ et $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$.

Cherchons les solutions de la forme :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 e^{-i\omega t} \quad (47)$$

On obtient alors l'équation aux valeurs propres :

$$-\omega^2 \vec{X}_0 = A\vec{X}_0 \quad (48)$$

avec ω^2 les valeurs propres de A et \vec{X}_0 les vecteurs propres.

en posant $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$, on obtient les vecteurs propres :

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sigma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

associés aux valeurs propres $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 1$, et $\Omega_3 = \sqrt{1 + 2\sigma}$.

En prenant les conditions initiales correspondant aux modes propres, nous retrouvons les solutions stationnaires du système présentées en figure 5.

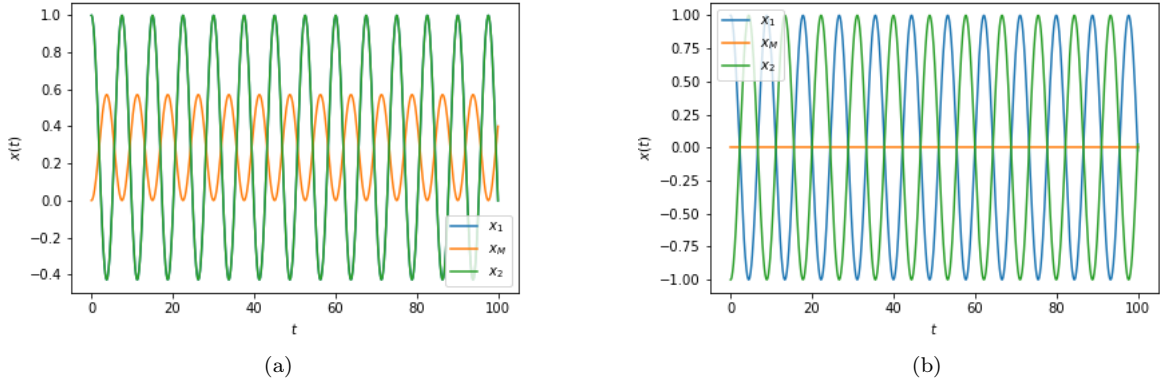


FIGURE 5 – Mouvement des masses couplées par des ressorts avec pour conditions initiales (1;0;-1) (a) et (1;0;1) (b).

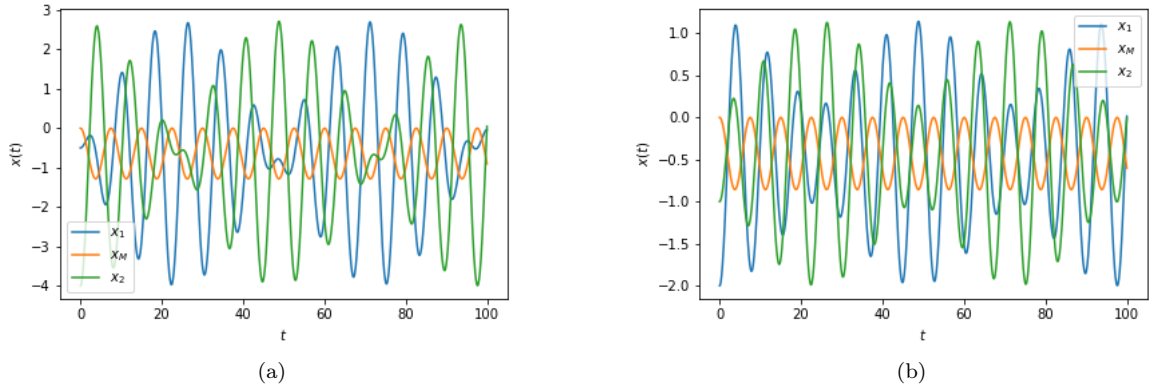


FIGURE 6 – Mouvement des masses couplées par des ressorts avec pour conditions initiales (-0.5;0;-4) (a) et (2;0;-1) (b).

La figure 6 correspond à la modélisation de la position des masses couplées par des ressorts pour différentes conditions initiales quelconques. Nous observons des battements qui sont une combinaison linéaire des modes propres observés sur la figure 5.

Puis, nous étudions le système où le couplage se fait au moyen de deux ressorts et d'un oscillateur de Van Der Pol.

Les équations adimensionnées de ce système sont :

$$\ddot{x}_1 - \mu[(1 - (x_1 - x_M)^2)\dot{x}_1 - (1 - (x_1 - x_M)^2)\dot{x}_M] + x_1 = 0 \quad (50a)$$

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x}_M - \mu[-(1 - (x_M - x_1)^2)\dot{x}_1 + (2 - (x_M - x_1)^2 - (x_M - x_2)^2)\dot{x}_M - (1 - (x_M - x_2)^2)\dot{x}_2] + x_M = 0 \quad (50b)$$

$$\ddot{x}_2 - \mu[-(1 - (x_2 - x_M)^2)\dot{x}_M + (1 - (x_2 - x_M)^2)\dot{x}_2] + x_2 = 0 \quad (50c)$$

où μ est le coefficient de Van Der Pol adimensionné [?].

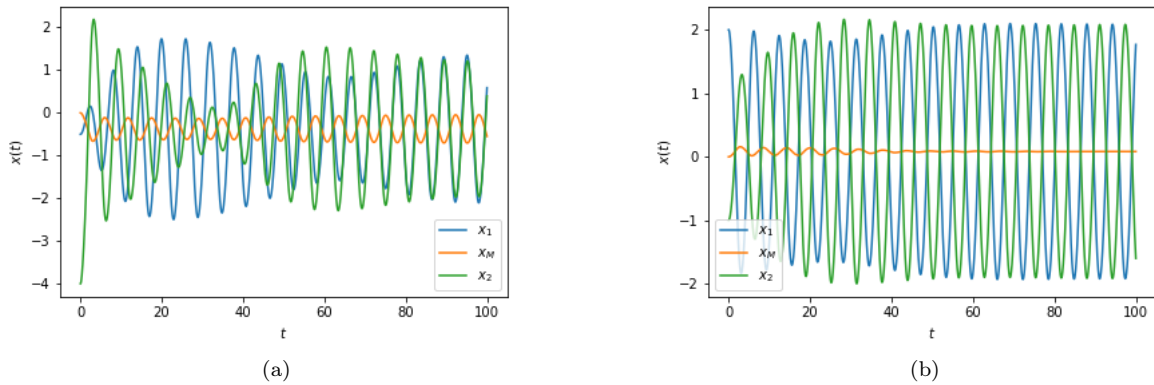


FIGURE 7 – Mouvement des masses couplées par des ressorts et par un oscillateur de Van der Pol avec pour conditions initiales $(-0.5; 0; -4)$ (a) et $(2; 0; -1)$ (b).

La figure 7(a) correspond à la synchronisation en phase des deux métronomes. Pour conserver la position du centre de masse, le mouvement de la planche est en opposition de phase par rapport aux mouvements des deux métronomes. La figure 7(b) correspond à la synchronisation en opposition de phase des deux métronomes, la planche est donc immobile.

Les figures 6 et 7 illustrent les mouvements des masses par rapport au temps pour les mêmes paramètres.

La figure 6 représente deux système couplés de manière identique, seules les conditions initiales sont différentes. La figure 7 représente les mêmes configurations pour un couplage différent. On observe une synchronisation lorsque les masses sont couplées non-linéairement alors que lorsque qu’elles le sont linéairement il n’y a pas de synchronisation pour ces couples de conditions initiales.

L’état final du système -synchronisé ou non- dépend de la combinaison des conditions initiales et des valeurs des paramètres reliant les masses et les fréquences.

Pour les mêmes conditions initiales, on observe que l’oscillateur de Van Der Pol joue un rôle important dans la synchronisation.

Dans la suite de notre projet, nous modéliserons un système plus complexe afin d’étudier les paramètres en adéquations avec les solutions stationnaires déterminées précédemment.

5 Conclusion

Toute l’étude menée ici a permis de mettre en évidence plusieurs points importants. Tout d’abord, nous avons vu que l’oscillateur de Van der Pol, non linéaire, jouait un rôle majeur dans la synchronisation de nos deux métronomes, eux-mêmes couplés par un terme non linéaire. Nous avons pu aussi voir, au terme d’une analyse des points fixes de notre système, que les paramètres mis en jeu doivent satisfaire à des conditions particulières si nous souhaitons observer une synchronisation, notamment un faible désaccord en fréquence.

Dans la suite de notre projet, nous tâcherons de modéliser numériquement un système de trois métronomes couplés afin d’obtenir un ensemble de paramètres impliquant une synchronisation. Nous mettrons alors en place un dispositif expérimental afin d’acquérir des données dans le but notamment de vérifier la pertinence de nos équations.

L’enjeu principal d’une telle modélisation est d’étendre ce système à un nombre plus grand de métronomes (i.e d’oscillateurs) et d’obtenir une généralisation du phénomène applicable à d’autres systèmes, en particulier les applaudissements de spectateurs dans une salle.

Un autre enjeu est de réaliser un dispositif expérimental pour un événement comme la Fête de la Science. En effet, ce montage est facile à mettre en place et le phénomène s’observe rapidement. Ces qualités en feraient un bon sujet afin d’éveiller la curiosité du plus grand nombre à l’égard de la science.