



UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
PROJET TUTEURÉ DE LICENCE DE PHYSIQUE

ANNÉE 2017

Physique & Topologie

Auteur:
Aurélien PERRAUD-USSEL

Encadrant:
Fabrice MORTESSAGNE

Projet réalisé à *L'Institut de Physique de Nice (site Valrose)*

April 4, 2017

Sommaire

1	Introduction	1
2	La transition Kosterlitz-Thouless (KT)	2
2.1	Les transitions de phases	2
2.2	Le modèle XY et la transition ferromagnétique - paramagnétique	2
2.3	Une transition de nature purement topologique	3
3	Effet Hall quantique	5
3.1	L'effet Hall "classique"	5
3.2	L'effet Hall quantique	5
3.3	Les niveaux de Landau	6
4	Conclusion	8
	Remerciements	9

1 Introduction

L'Académie Royale des Sciences de Suède a choisit de décerner en 2016 le prix Nobel de physique à trois théoriciens, **David J. Thouless**, **F. Duncan M. Haldane** et **J. Michael Kosterlitz** pour leurs “*découvertes théoriques des transitions de phases topologiques et des phases topologiques de la matière*”[1].

Récompensés pour leur travaux dans les années 70 et 80, ces trois théoriciens Britanniques ont utilisé des arguments topologiques pour expliquer les étranges phénomènes de la matière à très basses températures (proches du zéro absolu) et à deux dimensions.

La topologie décrit les propriétés qui restent inchangées par déformations continues d'un objet. Une manière commune d'introduire cette idée, est de montrer qu'un bagel et qu'une tasse de café sont deux objets topologiquement identiques : on peut déformer le premier continument pour arriver au second sans le couper et vice versa comme l'illustre la figure 1. Leur similarité réside dans la seule chose qu'ils ont en commun : un unique trou. Le nombre de trous en topologie est appelé un invariant topologique.



Figure 1: Illustration de la topologie avec le passage continu d'une tasse de café à un bagel.

Longtemps les physiciens ont pensé que toutes phases ordonnées seraient détruites pour des systèmes bidimensionnels même au zéro absolu, à cause des fluctuations thermiques, et donc qu'il ne pourrait pas y avoir de transition de phases. Mais dans les années 70, Kosterlitz et Thouless ont identifié une toute nouvelle espèce de transition de phase, qui se produit à deux dimensions, où les défauts topologiques jouent un rôle essentiel.

Dans les années 80 Thouless et Haldane ont travaillé sur l'effet Hall quantique découvert par le physicien allemand Von Klitzing en 1980 et lauréat du prix Nobel cinq ans plus tard. Nous y reviendrons plus en détail dans la seconde partie de ce rapport, mais Thouless et Haldane se sont une nouvelles fois servis d'arguments topologiques pour complètement comprendre comment se manifestait la quantification de la résistance de Hall à forts champs magnétique et à très basses températures.

Dans la première partie de ce rapport nous reviendrons sur la transition de phase de Kosterlitz-Thouless pour comprendre comment elle se manifeste en commençant par revenir sur ce qu'est une transition de phase de manière générale, puis nous verrons le cas de la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique dans le modèle XY pour pouvoir bien comprendre la transition Kosterlitz-Thouless.

Nous nous pencherons dans la seconde partie sur l'effet Hall quantique en reprenant les bases de l'effet Hall “classique” et la quantification des énergies de Landau pour un oscillateur harmonique quantique.

L'objectif de ce projet dans sa globalité sera de se familiariser sur les aspects topologiques de la matière en se concentrant notamment exclusivement sur la compréhension totale de l'effet Hall quantique et des ouvertures dans la physique de la matière condensée comme l'étude des isolants topologiques ou la physique du graphène.

2 La transition Kosterlitz-Thouless (KT)

2.1 Les transitions de phases

Lorsque l'on parle de transition de phase, on pense généralement à la fusion de la glace ou à la vaporisation de l'eau. Une transition de phase correspond à un changement des propriétés physique de la matière lorsqu'un paramètre extérieur varie, comme la température par exemple. Il existe plusieurs sortes de transitions de phases, elles sont classés en deux catégories :

- *Avec point de transition* : les deux phases sont en équilibre en ce point. Ce type de transition de phase s'accompagne d'une discontinuité de l'entropie et donc de l'existence d'une chaleur latente : le passage de l'état solide à l'état liquide de l'eau par exemple.
- *Passage continûment d'une phase à l'autre* : les deux phases ne sont jamais en équilibre en présence l'une de l'autre et il n'y a pas de chaleur latente. C'est le cas notamment de la transition ferromagnétique, de la condensation de Bose-Einstein ou de la transition superfluide.

Ces transitions de phases s'accompagnent très souvent par une brisure de symétries. Pour illustrer de manière à comprendre cet aspect important qui est le rôle des symétries, penchons nous sur un cas connu qui est l'eau et ses phases.

Alors que l'on pense que la glace présente à première vue plus de symétries que l'eau liquide à cause des arrangements réguliers formant un réseau périodique, l'eau liquide en présente davantage. Une répartition de particules au sein d'un ensemble se retrouve à l'identique statistiquement par translations ou rotations dans l'espace, alors qu'en phase plus ordonnée, seul un nombre fini de transformations spatiales sont possibles. Comme l'illustre la figure 2, la glace ne présente qu'un nombre fini de symétries spatiales. L'agencement hexagonal des atomes d'oxygène est invariant par toutes translations issues d'une combinaison linéaire des vecteurs élémentaires du réseau \vec{a} et \vec{b} . L'eau liquide, de son côté, présente toutes les rotations et translations possibles : si le groupement de particules est incliné ou déplacé, la symétrie globale ne change pas.

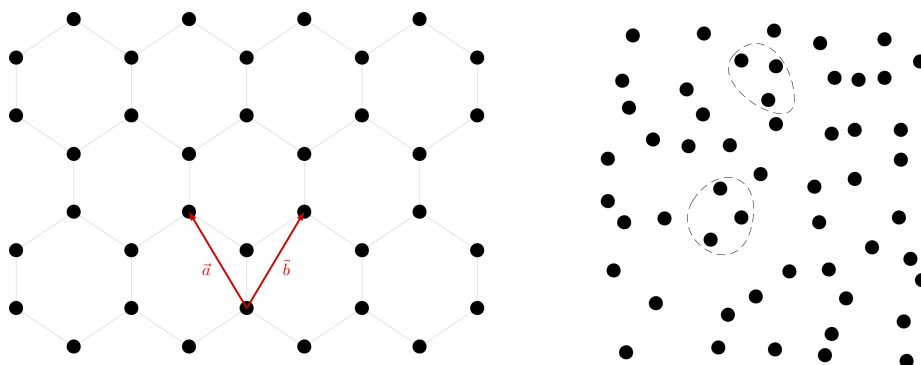


Figure 2: À gauche, le réseau cristallin hexagonal de la glace (en phase I_h) et à droite, les molécules désordonnées de l'eau à l'état liquide.

2.2 Le modèle XY et la transition ferromagnétique - paramagnétique

Certains matériaux peuvent être aimantés à des températures ordinaires. D'un point de vue microscopique, cela veut dire que presque tous les spins, assimilables à des porteurs d'un moment magnétique, sont orientés dans la même direction, et forment un aimant macroscopique.

L'interaction entre spins favorise l'alignement, en effet, chaque spin est influencé par ses voisins et tend à s'y aligner. Lorsque la température augmente, et qu'elle atteint une valeur critique, appelée température de Curie pour les corps ferromagnétiques, l'agitation thermique devient trop importante et l'aimantation devient nulle : le matériau devient paramagnétique, comme montré sur la figure 3.

À trois dimensions la transition de phase à cette température critique brise l'anisotropie originale de la phase ferromagnétique : la symétrie par rotation de tous les moments magnétiques est brisée et le matériau perd son aimantation.

Le modèle XY est un modèle bidimensionnel de moments magnétiques caractérisés par les spins de chaque atome. Le théorème de Mermin-Wagner stipule que les symétries continues ne peuvent pas être brisées spontanément à une température finie en dimensions deux ou moins. Les fluctuations thermiques tendent à rétablir

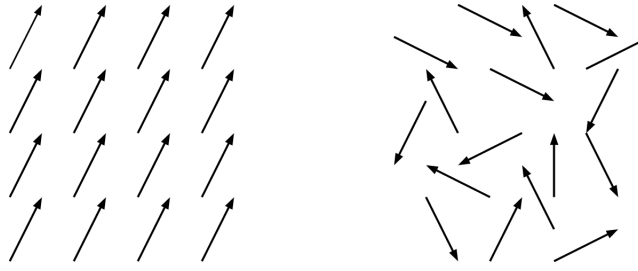


Figure 3: À gauche, la phase ordonnée ferromagnétique, à droite, la phase désordonnée paramagnétique.

les symétries à longues distances (donc à empêcher l'ordre) et empêchent la transition vers une phase ordonnée à une température finie : il ne peut donc pas y avoir de transition de phase ferromagnétique-paramagnétique dans le modèle XY.

2.3 Une transition de nature purement topologique

Prenons un film très fin à deux dimensions et à température nulle composé d'un réseau de spins où tous pointent dans la même direction tout en restant dans le plan comme sur la figure 4. Dans cette configuration, l'énergie est donc dans son état le plus bas.

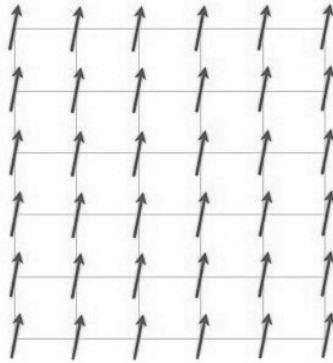


Figure 4: Réseau de spins alignés dans un réseau 2D.

L'Hamiltonien qui définit le modèle XY s'écrit de la forme

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (1)$$

où la constante J détermine la force de l'interaction magnétique, \vec{S}_i l'orientation d'un spin à la position " i " (et de manière analogue en j).

Lorsqu'on augmente la température, l'énergie augmente et les spins commencent à s'organiser de manière différente. Une organisation particulière et intéressante est la formation de "vortex", où chaque spin tend à s'aligner avec ses voisins mais sans totalement y parvenir pour autant. L'énergie à apporter pour créer un unique vortex est de la forme

$$E_v = J\pi \ln \frac{L}{a} \quad (2)$$

avec L la taille du système et a , rayon de coupure (distance à laquelle on passe de la partie d'interaction à courte distance de la partie interaction à longue distance). Donc pour un grand système, l'énergie à apporter à un seul vortex est très importante, et ne peut provenir des fluctuations thermiques, et donc longtemps il a été pensé qu'ils pouvaient être négligés.

Il existe cependant une autre configuration de spins à basses températures : les antivortex. Ils sont similaires au vortex énergétiquement, mais "tournent" dans le sens contraire comme montré à droite sur la figure 5. Encore une fois, on pourrait penser que les antivortex soient sans importance s'il y a trop peu d'énergie disponible.

Mais c'est ici que Kosterlitz et Thouless remarquèrent que la combinaison d'un vortex et d'un antivortex a bien moins d'énergie qu'un seul vortex, et qu'ils formaient des paires. Alors que l'énergie d'un seul vortex diverge en $\ln L$, ce n'est pas le cas pour une paire constituée d'un vortex et d'un antivortex, puisqu'elle possède une vorticitée totale nulle. L'énergie demandée pour créer ces paires est

$$E = 2\pi J \ln \frac{r}{a} \quad (3)$$

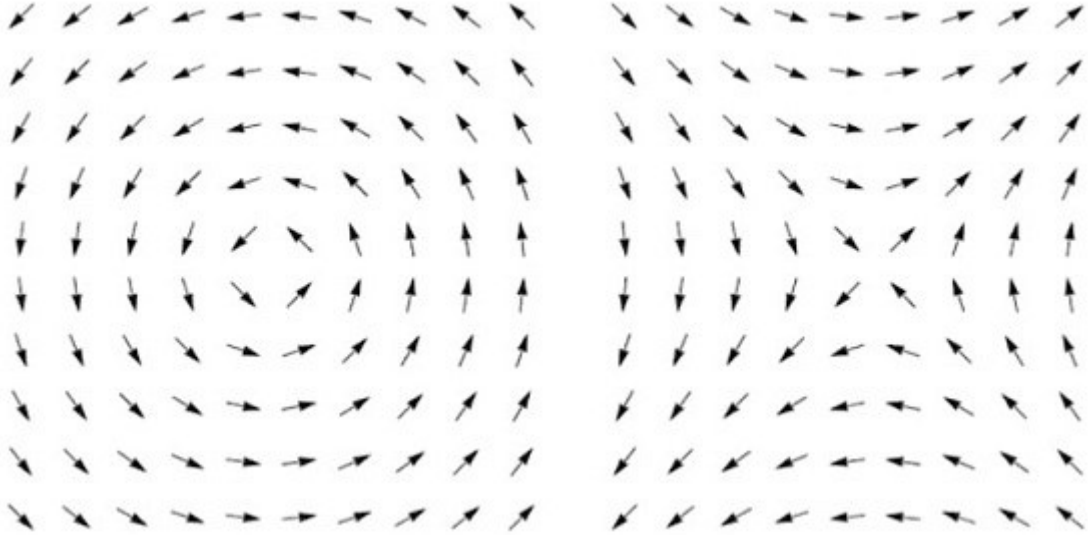


Figure 5: À gauche, une configuration de spins formant un vortex, et à droite, une configuration de spins formant un antivortex.

avec r la distance séparant deux vortex de la paire. On est donc en présence d'un "gaz" de paires de vortex-antivortex, et chaque vortex reste lié étroitement à un antivortex puisqu'il faut un apport important d'énergie pour les séparer.

Si l'on augmente la température, de plus en plus de paires de vortex-antivortex se forment puisque l'énergie disponible pour les créer augmente. Kosterlitz et Thouless ont montré qu'à une certaine température critique T_{KT} , les paires de vortex-antivortex se brisaient en vortex individuels. En effet, à cette température, la densité de paires de vortex-antivortex devient trop importante et ces paires se heurtent tellement qu'on ne peut plus déterminer quel vortex est couplé avec quel antivortex. Une fois libres, les vortex et antivortex peuvent être assimilés à des particules de charges $+1$ et -1 avec une force d'interaction en $1/r$. Puisque cela correspond à la force d'interaction de Coulomb à deux dimensions, la physique des défauts topologiques est similaire à la physique d'un gaz de Coulomb neutre à deux dimensions : on associe cette *charge topologique* à "l'enroulement" d'une phase. L'énergie libre pour un seul vortex est donc la suivante :

$$F = E - TS = J\pi \ln \frac{L}{a} - Tk_B \ln \frac{L^2}{a^2} \quad (4)$$

avec k_B la constante de Boltzmann, et où l'entropie est calculée en supposant qu'il y a L^2/a^2 possibles positions pour un vortex de surface a . À la température critique $T_{KT} = J\pi/2k_B$ l'énergie s'équilibre avec l'entropie et on peut donc s'attendre à une transition à une phase constituées de vortex libres.

À la différence des transitions de phases usuelles, la transition KT^1 ne brise aucune symétrie, chose totalement nouvelle et inattendue si l'on se réfère au théorème de Mermin-Wagner. Kosterlitz et Thouless ont montré que le théorème était vrai dans le sens qu'aucune symétrie continue n'est rompue spontanément à température finie, mais qu'il y avait toujours une transition de phase continue à une certaine température finie.

La transition topologique Kosterlitz-Thouless a pu être mise en évidence sur différents systèmes physiques, tel que les films d'hélium superfluide, ou encore les films désordonnés supraconducteurs.

¹Ou KBT pour Berezinskii-Kosterlitz-Thouless, en hommage à Vadim Berezinskii physicien Russe décédé en 1981 qui avait travaillé sur cette transition de phase indépendamment des deux Britanniques un an auparavant.

3 Effet Hall quantique

3.1 L'effet Hall "classique"

Avant de parler de l'effet Hall quantique, il est raisonnable de parler de l'effet Hall que l'on pourrait qualifier de "classique". Découvert en 1879, Edwin Hall essayait pendant sa thèse de doctorat de savoir si la résistance électrique était affectée par le champ magnétique.

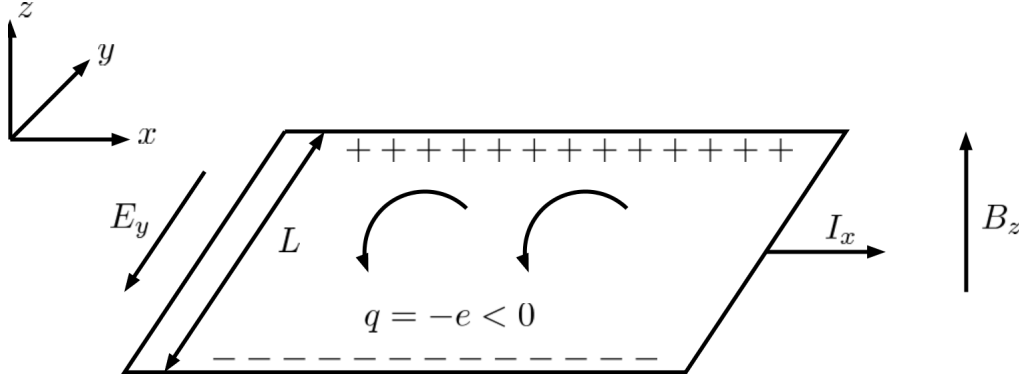


Figure 6: Géométrie de l'effet Hall

Considérons un matériau supposé bidimensionnel dans le plan xOy , de largeur L suivant l'axe Oy et parcouru par une intensité $I = jL$ issu d'un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$ constant de charge q . Si l'on ajoute un champ magnétique perpendiculaire au plan tel que $\vec{B} = B\vec{e}_z$, les porteurs de charges subissent via la force de Lorentz, une déviation qui courbe leur trajectoire vers le bord extérieur, et s'y accumule comme illustré sur la figure 6. Il va donc apparaître une différence de potentiel induisant un champ électrique suivant \vec{e}_y . Un régime stationnaire est ainsi atteint et on peut donc écrire l'équation du mouvement comme :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0} \quad (5)$$

Avec $-m\frac{\vec{v}}{\tau}$ une force phénoménologique du modèle de Drude, assimilable à une force "visqueuse" qui traduit de façon empirique les différents processus de dissipation : collisions des électrons avec les impuretés du matériau, avec les phonons, etc, et où τ est le temps moyen entre deux collisions. En prenant composantes par composantes sur x et y on obtient :

$$qE_x + qBv_y = \frac{mv_x}{\tau} \quad (6)$$

$$qE_y - qBv_x = \frac{mv_y}{\tau} \quad (7)$$

Comme il n'y a pas de courant suivant \vec{e}_y , la vitesse suivant cette composante est nulle et on a donc $v_x = q\tau E_x/m$ et la densité de courant :

$$j_x = nqv_x = \frac{nq^2\tau}{m} E_x \quad (8)$$

avec n la densité de porteurs de charges. Le champ électrique suivant \vec{e}_y est alors $E_y = Bv_x$ appelé champ de Hall et la différence de potentiel induite, appelée tension de Hall est donc $V_H = LE_y$ (où L est la largeur du matériau), et comme $I = jL$ et $V_H = R_H I$ alors

$$R_H = \frac{B}{nq} \quad (9)$$

On remarque donc que la résistance de Hall est linéairement proportionnelle au champ magnétique. En réalité, cette dépendance linéaire n'est vrai que pour des champs magnétiques raisonnables et à des températures ambiantes. La relation devient tout autre lorsqu'on commence à travailler avec des champs magnétiques très importants et à des températures proches du zéro absolu, et nous devons donc utiliser une approche quantique du problème.

3.2 L'effet Hall quantique

C'est en 1980 que Von Klitzing effectue une mesure de la résistance de Hall à très basses températures (de l'ordre de $1K$) et à des champs magnétique très importants (de l'ordre d'une dizaine de Tesla). Il remarque alors que la résistance de Hall est quantifiée et prend des valeurs constantes par plateaux comme l'illustre la figure 7. Pour bien comprendre l'effet Hall quantique, il nous faut d'abord comprendre la dynamique quantique des électrons dans un champ magnétique[2].

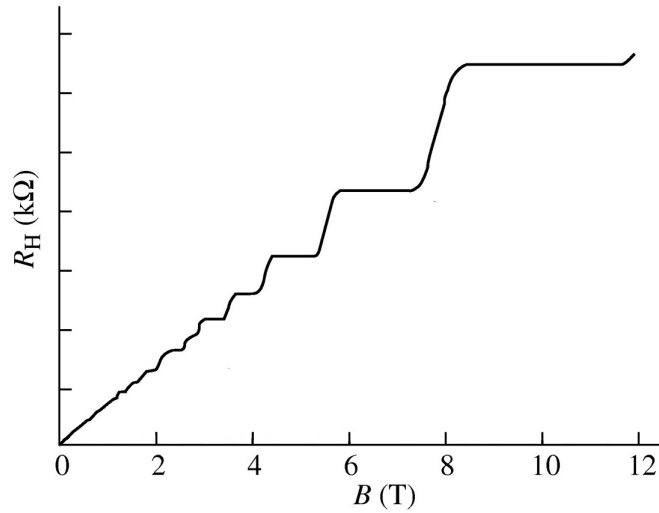


Figure 7: Représentation de la variation de la résistance de Hall en fonction du champ magnétique pour une densité de porteurs constante.

3.3 Les niveaux de Landau

Les calculs précédent montraient des électrons soumis à des champs magnétiques relativement faibles. En présence d'un champ magnétique élevé, les trajectoires de ces électrons deviennent circulaires, trouvée à partir de l'équation du mouvement classique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (10)$$

Comme l'illustre la figure 8, les orbites sont de rayon

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{v}{\omega_c} \quad (11)$$

avec $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ la fréquence cyclotron (ou fréquence de Larmor).

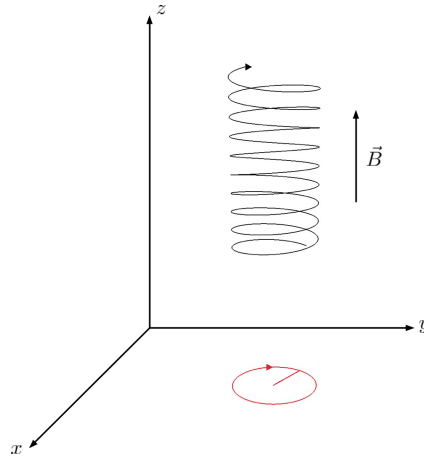


Figure 8: Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et sa projection sur le plan xOy .

Pour mettre en évidence le champ magnétique en mécanique quantique, on passe par le potentiel vecteur \vec{A} relié à \vec{B} par la relation

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (12)$$

Dans un choix de jauge global ne modifiant pas le champ magnétique, on passe par la jauge symétrique, qui nous permet d'écrire le potentiel vecteur sous la forme

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r} \quad (13)$$

En utilisant la quantification de Bohr-Sommerfeld (calcul semi-classique valable ici) pour un mouvement périodique comme les trajectoires cyclotrons des électrons

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} = (n + \frac{1}{2})h \quad (14)$$

avec n un entier positif ou nul, et donc l'impulsion $\vec{P} = m\vec{v} - q\vec{A}$ le couplage minimal par invariance de jauge, et ici $d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta$ on trouve

$$2\pi R(mv - \frac{qRB}{2}) = (n + \frac{1}{2})h \quad (15)$$

Or $mv = qBR$ et $E = mv^2$, donc en multipliant par v de part et d'autre de l'équation et en réajustant, on obtient

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \quad (16)$$

On remarque alors que l'énergie est quantifiée par *niveaux de Landau* n entiers représentés sur la figure 9 ainsi que les orbites cyclotrons :

$$R^2 = (2n + 1) \frac{\hbar}{|q|B} = (2n + 1)l_B^2 \quad (17)$$

où l'on introduit $l_b = \sqrt{\frac{\hbar}{|q|B}}$ la longueur magnétique.

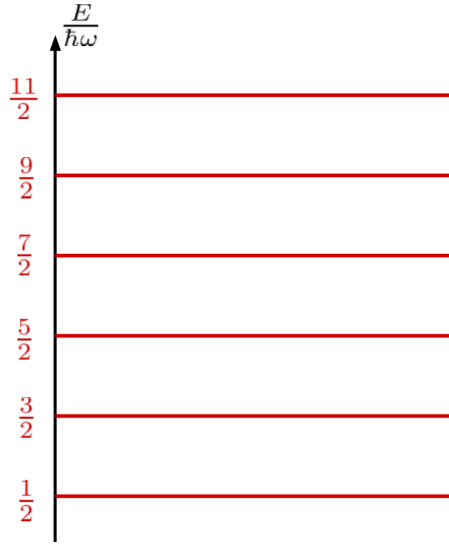


Figure 9: Niveaux de Landau équirépartis sur le spectre d'énergie.

On peut remarquer que ces niveaux de Landau sont fortement dégénérés (figure 10). En effet, deux dimensions, sans prendre en compte la dégénérescence de spin, la densité d'état d'énergie par unité de surface $\rho(\epsilon)$, à savoir le nombre d'états accessibles entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$, est indépendante de l'énergie et est de la forme

$$\rho(\epsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \quad (18)$$

Le nombre d'états g dans un niveau de Landau, appelé dégénérescence de Landau est égal au nombre d'états compris dans une tranche de largeur $\hbar\omega_c$, d'où

$$g = \rho(\epsilon)\hbar\omega_c \quad (19)$$

Dans un matériau de Hall d'une densité n de porteurs de charge, on note le facteur de remplissage $\nu = n/g$. On peut donc récrire la résistance de Hall sous la forme

$$R_H = \frac{B}{ne} = \frac{h}{\nu e^2} \quad (20)$$

Les calculs précédents nous ont permis de comprendre la quantification des niveaux d'énergie pour des particules chargées soumises à un champ magnétique. En revanche, nous ne sommes toujours pas en état de comprendre d'où viennent les plateaux de résistance de Hall. La résistance de Hall dépend à priori d'un facteur de remplissage $\nu \in \mathbb{R}$, donc pourquoi R_H est quantifiée alors que la variable est continue ?

Nous verrons dans la suite du projet comment comprendre l'origine des plateaux en étudiant les états de bord et le désordre jusqu'à fournir une interprétation topologique des plateaux de la résistance de Hall.

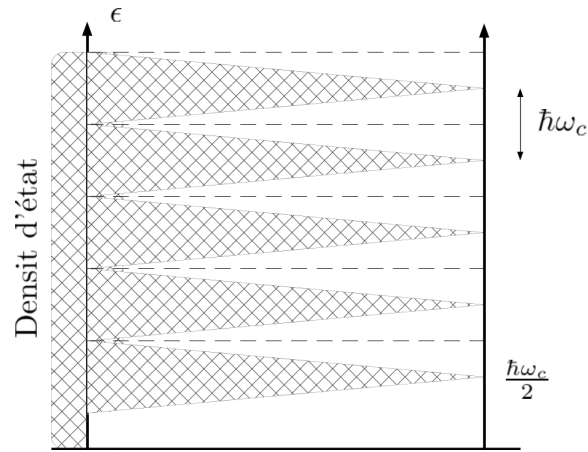


Figure 10: Condensation des niveaux de Landau en niveau discret partant d'un continuum d'états. Les niveaux de Landau sont g fois dégénérés.

4 Conclusion

La découverte de ces phases topologiques de la matière ouvre des perspectives pour les moins prometteuses dans le domaine de la physique de la matière condensée et notamment des espoirs concernant l'informatique quantique.

Nous mettrons en avant dans la suite de ce projet les aspects topologiques de la matière en nous focalisant uniquement sur l'effet Hall quantique. Nous pousserons dans un premier temps l'étude de ce phénomène phare de la physique de la matière condensée en étudiant les états de bord et le rôle du désordre dans la mise en évidence des plateaux de la résistance de Hall. Nous pourrions alors nous pencher sur la physique des théories des bandes topologiques et sur les nouveaux systèmes physiques tels que les isolants topologiques.

Remerciements

Je voudrais remercier évidemment en premier lieu Fabrice Mortessagne pour tous les éclaircissements fournis avec grande pédagogie et maîtrise sur tous les sujets abordés, qu'ils aient été ou pas présentés dans ce rapport.

Je remercie sincèrement le laboratoire de l'Institut de Physique de Nice du site Valrose pour m'avoir accueilli et à Valérie Doya pour sa disponibilité et ses aides apportées.

References

- [1] Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences. Topological phase transitions and topological phases of matter. https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/advanced-physicsprize2016.pdf, 2016.
- [2] Gilles Montabaux. *Physique mésoscopique et conduction quantique*. Ecole Polytechnique, 2011.